

Movimento harmônico subamortecido e a lei de Faraday-Lenz

Underdamped harmonic motion and the Faraday-Lenz law

Gabrielle A.M. Gonche¹, José M.R. Monteiro¹, Ana P. Alves², André T. Cesário^{*1}

¹Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física, Belo Horizonte, MG, Brasil.

²Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Instituto de Engenharia, Ciência e Tecnologia, Janaúba, MG, Brasil.

Recebido em 23 de dezembro de 2025. Revisado em 24 de março de 2026. Aceito em 26 de março de 2026.

This work presents an experimental investigation of the magnetic damping of a neodymium magnet oscillating inside a copper tube and establishes a direct analogy with viscous damping in mass-spring systems. Based on the Faraday-Lenz law, we derive the induced electromotive force using two equivalent approaches and demonstrate that the resulting magnetic force opposes the motion and is proportional to the magnet's velocity. We show that the magnetic damping coefficient depends only on the magnetic permeability of free space, the magnet's dipole moment, the electrical conductivity of the tube, and its geometry. The magnetic dipole moment is determined experimentally from measurements of the repulsive force between two identical magnets. The effective damping coefficient is obtained independently from a nonlinear fit to the damped oscillatory motion. A comparison between experimental values reveals a relative difference of approximately 12%, consistent with experimental uncertainties and model idealizations. Owing to its low cost, high reproducibility, and ease of implementation, the experiment constitutes an effective didactic tool for the integrated teaching of electromagnetic induction, damped harmonic motion, and uncertainty analysis in introductory physics laboratories.

Keywords: Magnetic damping, Faraday-Lenz law, Damped harmonic oscillator, Foucault currents, Experimental physics education.

Este trabalho apresenta uma investigação experimental do amortecimento magnético de um ímã de neodímio que oscila no interior de um tubo de cobre e estabelece uma analogia direta com o amortecimento viscoso em sistemas mola-massa. Com base na lei de Faraday-Lenz, derivamos a força eletromotriz induzida por meio de duas abordagens equivalentes e demonstramos que a força magnética resultante se opõe ao movimento e é proporcional à velocidade do ímã. Mostramos que o coeficiente de amortecimento magnético depende exclusivamente da permeabilidade magnética do espaço livre, do momento dipolar do ímã, da condutividade elétrica do tubo e de sua geometria. Determinamos experimentalmente o momento dipolar magnético a partir de medições da força repulsiva entre dois ímãs idênticos. Obtivemos, de forma independente, o coeficiente de amortecimento efetivo por meio de um ajuste não linear ao movimento oscilatório amortecido. A comparação entre os valores experimentais revela uma diferença relativa de aproximadamente 12%, valor consistente com as incertezas experimentais e com as idealizações do modelo. Devido ao baixo custo, à alta reprodutibilidade e à facilidade de implementação, o experimento constitui uma ferramenta didática eficaz para o ensino integrado de indução eletromagnética, movimento harmônico amortecido e análise de incertezas em laboratórios de física introdutória.

Palavras-chave: Amortecimento magnético, Lei de Faraday-Lenz, Oscilador harmônico amortecido, Correntes de Foucault, Ensino experimental de física.

1. Introdução

O movimento harmônico amortecido constitui um dos modelos fundamentais da física clássica e desempenha um papel central na descrição de sistemas mecânicos, elétricos e eletromagnéticos sujeitos à dissipação de energia [1, 2]. Esse modelo aparece de forma recorrente em cursos de Mecânica Clássica, Oscilações e Ondas, Vibrações Mecânicas e Física Experimental, sendo utilizado para descrever desde sistemas massa-mola até

circuitos elétricos do tipo “RLC” e dispositivos de controle de vibrações em engenharia. Do ponto de vista teórico, a dinâmica de um oscilador amortecido é bem compreendida, admitindo soluções analíticas simples em regimes como o subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

Apesar de sua ubiquidade teórica, a realização experimental controlada de um sistema massa-mola-amortecedor com força dissipativa linear em velocidade apresenta dificuldades significativas em contextos didáticos [3, 4]. Em sistemas reais, o amortecimento mecânico geralmente resulta de uma combinação de efeitos: atrito seco, resistência do ar, dissipação interna dos materiais,

*Endereço de correspondência: andretcs@ufmg.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

histerese do material, além de interações hidrodinâmicas complexas (que raramente podem ser isoladas ou ajustadas de forma independente). Em particular, o chamado amortecimento viscoso ideal, no qual a força dissipativa é estritamente proporcional à velocidade, exige condições hidrodinâmicas específicas, frequentemente associadas a camadas limite dependentes da frequência de oscilação e das propriedades do fluido, o que dificulta sua implementação em bancadas experimentais simples [5].

Nesse contexto, diferentes abordagens didáticas têm explorado sistemas alternativos [6–8] capazes de reproduzir, de forma controlada, uma força dissipativa linear em velocidade. Entre essas abordagens, destacam-se experimentos envolvendo ímãs permanentes, que permitem introduzir conceitos fundamentais de magnetismo e indução eletromagnética por meio de montagens acessíveis e visualmente intuitivas. Estudos clássicos sobre frenagem magnética [9] estabeleceram os fundamentos teóricos para compreensão desses sistemas. Trabalhos recentes têm utilizado ímãs de neodímio para caracterizar grandezas como o momento de dipolo magnético, o campo magnético de um dipolo e a força eletromotriz induzida, com base direta na Lei de Faraday-Lenz [8, 10].

O presente trabalho insere-se nessa linha didática, ao propor um experimento de baixo custo e alta replicabilidade no qual um ímã de neodímio oscila no interior de um tubo de cobre, sofrendo uma força de amortecimento de origem eletromagnética. As correntes de Foucault induzidas no tubo geram um campo magnético que, de acordo com a Lei de Faraday-Lenz, se opõe ao movimento do ímã, resultando em uma força dissipativa proporcional à velocidade. Essa força apresenta uma forma funcional análoga à força de amortecimento viscoso, permitindo estabelecer uma analogia direta com o modelo massa-mola-amortecedor amplamente estudado em cursos de mecânica.

Além de contornar as dificuldades experimentais associadas ao amortecimento viscoso mecânico, o sistema estudado apresenta a vantagem de depender de parâmetros físicos bem definidos, como o momento de dipolo magnético do ímã, a condutividade elétrica do tubo e sua geometria [8, 11]. Isso possibilita uma comparação quantitativa direta entre previsões teóricas e resultados experimentais, incluindo a propagação sistemática de incertezas. Dessa forma, o experimento se consolida como uma ferramenta didática eficaz para o ensino integrado de indução eletromagnética, oscilações amortecidas e análise de dados experimentais em cursos de física básica e experimental.

Antes de introduzirmos o amortecimento magnético, é instrutivo relembrar por que o chamado amortecimento viscoso linear, frequentemente adotado como modelo ideal em cursos de Oscilações, é de difícil implementação experimental em sistemas mecânicos reais. Essa revisão permite contextualizar a motivação central deste trabalho: a busca por um sistema didático no qual a força dissipativa seja, por construção física, proporcional à velocidade.

A Lei de Newton para a Viscosidade estabelece que a tensão de cisalhamento τ em um fluido é proporcional ao gradiente de velocidade $\frac{dv}{dy}$ perpendicular à direção do movimento. Matematicamente, essa relação é expressa como

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (1)$$

em que τ é a tensão de cisalhamento em $\text{Pa} = \text{N/m}^2$, F é a força de cisalhamento (em N), A é a área sobre a qual a força atua (em m^2), η é a viscosidade dinâmica do fluido (em $\text{Pa} \cdot \text{s}$), e $\frac{dv}{dy}$ é o gradiente de velocidade perpendicular ao plano de cisalhamento (em s^{-1}). Esta equação mostra que a resistência ao movimento em um fluido aumenta com a viscosidade do fluido e o gradiente de velocidade entre camadas do fluido.

A expressão idealizada do coeficiente de atrito viscoso obtida a partir da Eq. (1), isto é, $c = \eta A/\varepsilon$, pressupõe a existência de uma camada de fluido de espessura ε fixa e bem definida, associada a um perfil de velocidade aproximadamente linear. Em sistemas oscilatórios reais, entretanto, essa hipótese deixa de ser válida: a região efetivamente cisalhada do fluido é determinada pela camada limite oscilatória de Stokes, cuja espessura característica é $\delta(\omega) \sim \sqrt{2\eta/(\rho\omega)}$, onde ρ é a massa específica do fluido [12–14]. Como consequência, o coeficiente de amortecimento passa a depender explicitamente da frequência de oscilação e das propriedades do fluido, deixando de ser uma constante puramente geométrica. Essa dependência torna difícil a realização experimental de um amortecimento viscoso estritamente linear em velocidade em montagens didáticas simples.

Consequentemente, a determinação experimental acurada de um coeficiente de amortecimento viscoso puramente linear requer um controle rigoroso do regime hidrodinâmico, frequentemente inviável em experimentos didáticos. Essa complexidade motiva a busca por sistemas alternativos em que a força dissipativa seja linear em velocidade por construção física, como ocorre no amortecimento magnético estudado neste trabalho, no qual o coeficiente de amortecimento depende apenas de parâmetros geométricos e eletromagnéticos bem definidos.

Assumindo o regime quase-estático, no qual a resposta do condutor pode ser tratada como predominantemente resistiva (isto é, desprezando contribuições indutivas relevantes), quando um sistema massa-mola está imerso em um fluido viscoso, a 2ª Lei de Newton leva a uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes. Essa equação inclui o termo de amortecimento viscoso e resulta em

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} = -kx - c\dot{x},$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (2)$$

em que m é a massa do sistema em kg, $\ddot{x}$ é a aceleração, descrita em m/s^2 , $\dot{x}$ é a velocidade em m/s , e k é a

constante de mola (rigidez da mola), dada em N/m. Esse modelo descreve o movimento harmônico amortecido, em que a energia do sistema é dissipada devido à força de amortecimento viscoso, levando a uma redução exponencial da amplitude das oscilações.

No contexto deste estudo, o comportamento do amortecimento viscoso é análogo ao do amortecimento magnético observado, onde a força resistiva é proporcional à velocidade do ímã, mas é causada por interações magnéticas em vez de interações viscosas. A constante de amortecimento magnético, assim como no caso do amortecimento viscoso, depende das características físicas do sistema.

A solução da Eq. (2) para um sistema subamortecido, isto é, quando $c^2 < 4mk$ é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad (3)$$

onde $\gamma = \frac{c}{2m}$ é a constante de decaimento exponencial do sistema, em s^{-1} , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural angular do sistema não amortecido e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ é a frequência angular amortecida do sistema. Esta frequência é a quantidade que determina o movimento oscilatório dentro do envelope exponencial dado por $\{\pm x_0 e^{-\gamma t}\}$ e é efetivamente observada quando o sistema está no regime subamortecido [15–19].

Neste estudo, comparamos o comportamento do sistema de amortecimento magnético com um modelo de amortecimento viscoso, destacando as similaridades e diferenças na dissipação de energia e na dinâmica do movimento [20, 21]. Além disso, realizamos experimentos para determinar o momento de dipolo magnético do ímã e a constante de amortecimento magnético e, com isso, verificar a validade do modelo teórico proposto.

A investigação dos mecanismos de amortecimento é crucial para o desenvolvimento de tecnologias que exigem controle preciso de vibrações e movimentos oscilatórios. A compreensão detalhada do amortecimento magnético, em particular, oferece oportunidades para inovar em áreas como sensores magnéticos, sistemas de suspensão e dispositivos de amortecimento em engenharia civil e mecânica.

2. Teoria

Consideremos um ímã que cai através de um anel de material condutor. De acordo com a Lei de Faraday-Lenz, a variação do fluxo magnético no anel induz uma corrente elétrica. Quando o fluxo magnético aumenta dentro do anel devido à queda do ímã, uma corrente elétrica é gerada no anel de forma que o campo magnético induzido se oponha à mudança do fluxo magnético. Isso resulta em uma força que age contra o movimento do ímã [20–22]. Similarmente, quando o ímã passa pelo anel e o fluxo magnético diminui, a corrente induzida gera um campo magnético que tenta aumentar o fluxo magnético no anel. Esta variação do fluxo magnético na espira causa

uma força eletromotriz (f.e.m.), que gera uma corrente na espira. Essa corrente induzida, consequentemente, aplica uma força magnética no ímã, que se opõe ao seu movimento.

Agora, consideremos o ímã caindo dentro de um tubo condutor. O tubo pode ser idealizado como uma sucessão de anéis que sustentam correntes induzidas pelo movimento do dipolo magnético, gerando uma força oposta à queda. Como a f.e.m. induzida é proporcional à taxa de variação do fluxo magnético, a força resistiva resultante é proporcional à velocidade do ímã, caracterizando um amortecimento magnético análogo ao amortecimento viscoso linear. Esse mecanismo de frenagem por correntes de Foucault é amplamente discutido na literatura [9, 23–25], incluindo deduções analíticas do coeficiente efetivo de amortecimento.

A contribuição do presente trabalho é de natureza didática. Optamos por uma dedução direta, baseada na aplicação sucessiva de conceitos já consolidados no currículo de Eletromagnetismo. Partindo do campo magnético na aproximação de dipolo, calcula-se o fluxo através de um anel, determina-se a f.e.m. pela Lei de Faraday-Lenz, obtém-se a corrente induzida via resistência elétrica e, por fim, avalia-se a força magnética exercida sobre o dipolo. Essa sequência lógica reproduz a estrutura típica de problemas de livros-texto de graduação, preservando o rigor físico sem recorrer a formalismos mais avançados que poderiam obscurecer a compreensão conceitual do mecanismo de amortecimento magnético.

O experimento consiste em um sistema massa-mola-amortecedor, em que uma massa é pendurada em uma mola e conectada a um ímã de neodímio que oscila dentro de um tubo de cobre. Esse sistema pode ser descrito pela Eq. (2), que consiste em uma equação diferencial ordinária e de segunda ordem, linear, homogênea e com coeficientes constantes. Para determinar a força de amortecimento análoga à força de atrito viscoso $|\vec{F}_v| = c\dot{x} = cv$, em que c é uma função das grandezas eletromagnéticas e dos parâmetros geométricos do sistema, seguiremos os seguintes passos: *i.* Aproximação de dipolo magnético: Realizaremos uma aproximação de dipolo magnético para o ímã. Com isso, iremos aproximar o campo de um ímã pelo campo de um dipolo magnético com um momento de dipolo $\vec{M}$ que deverá ser medido experimentalmente por uma prática suplementar. *ii.* Cálculo da força eletromotriz ($\mathcal{E}$): Utilizaremos a lei de Faraday-Lenz para calcular a f.e.m. induzida em um anel de cobre causada pelo movimento de um dipolo magnético (o ímã) enquanto ele passa através do plano do anel. *iii.* Determinação da força magnética no ímã: Calcularemos a força que cada anel diferencial do tubo exerce no dipolo magnético. O tubo será enxergado como um empilhamento de anéis e a força total é o somatório das forças que cada um dos anéis diferenciais elementares causa no dipolo e, por último, *iv.* Cálculo da força total $\vec{F}(v)$: Integraremos as contribuições das forças de todos os anéis do tubo para determinar a força total que o tubo exerce no ímã, que deverá ser proporcional à velocidade

do ímã, para que a montagem seja análoga a um sistema massa-mola ligado a um amortecedor viscoso, cuja força de atrito viscoso possui o comportamento $|F_v| \propto v$.

2.1. Aproximação de dipolo magnético

A aproximação do comportamento magnético de um ímã por meio do modelo de dipolo magnético é uma técnica amplamente utilizada para simplificar sua descrição [26–28]. Nesse modelo, um ímã permanente é tratado como um dipolo magnético ideal, composto por um par de polos magnéticos (norte e sul) separados por uma distância específica, conforme observado na Fig. 1. Essa simplificação é valiosa, pois nos permite descrever os efeitos magnéticos macroscópicos do ímã sem precisar considerar todos os detalhes microscópicos do material subjacente. A Fig. 1 a) ilustra um ímã posicionado no eixo axial de um tubo de material condutor (considerado infinito) de raio interno a e raio externo b e a Fig. 1 b) representa a aproximação de dipolo realizada neste modelo. O tubo é representado por um anel condutor de raio $\bar{R}$. Posteriormente, iremos tratar da geometria exata do tubo condutor.

Nesta abordagem, consideramos o ímã como um dipolo magnético ideal, representado pelo vetor de dipolo $\vec{M}$. Este vetor tem uma magnitude M e uma direção unitária $\hat{k}$, que indica a orientação do dipolo. O campo magnético $\vec{B}$ gerado por um dipolo magnético pode ser aproximado em pontos distantes do ímã. Para isso,

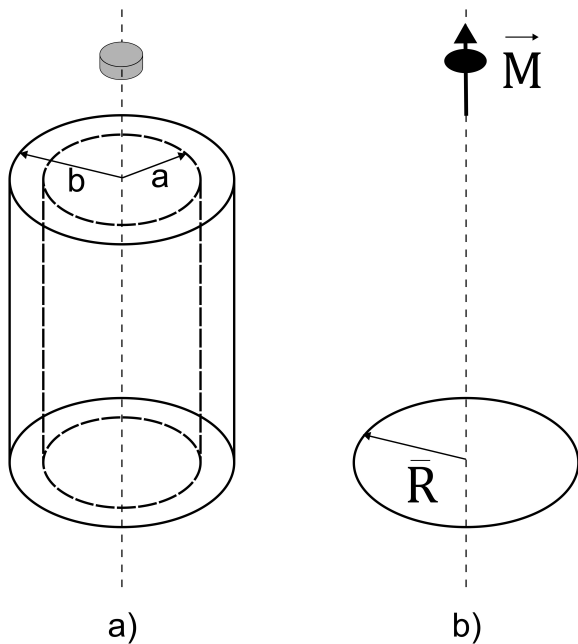


Figura 1: Aproximação de Dipolo: a) ilustra um ímã posicionado no eixo axial de um tubo de material condutor com sua respectiva geometria: raio interno a e raio externo b e b) representa a aproximação de dipolo realizada neste modelo. O tubo é representado por um anel condutor de raio $\bar{R}$.

utilizamos a seguinte equação [29, 30]:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{M}r^2}{r^5}, \quad (4)$$

em que $\vec{B}(\vec{r})$ é o vetor campo magnético (ou densidade de fluxo magnético, em teslas) no ponto $\vec{r}$, μ_0 é a permeabilidade do ar livre ($\approx 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$) e $\vec{M}$ é o momento de dipolo magnético. A Eq. (4) nos permite calcular o campo magnético em qualquer ponto r do espaço em torno de um dipolo magnético, assumindo que estamos longe o suficiente do dipolo para que a aproximação de dipolo seja válida. Esta aproximação é essencial para calcular forças magnéticas em condutores, como demonstrado em estudos fundamentais sobre forças em ímãs em movimento [31].

Considerando que $\vec{M} = M\hat{k}$, teremos, portanto, $\vec{M} \cdot \vec{r} = Mz$. Deste modo, a Eq. (4) pode ser escrita em termos de suas componentes:

$$B_x = \vec{B} \cdot \hat{i} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{3xz}{r^5}, \quad (5)$$

$$B_y = \vec{B} \cdot \hat{j} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{3yz}{r^5}, \quad (6)$$

$$B_z = \vec{B} \cdot \hat{k} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \quad (7)$$

Este problema possui simetria cilíndrica; portanto, iremos transformar as coordenadas cartesianas para as coordenadas cilíndricas. Assim, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ pode ser escrito como $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, com $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. O campo magnético em coordenadas cilíndricas será escrito como $\vec{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_\phi \hat{\phi} + B_z \hat{k}$ [23]. Podemos reescrever as Eqs. (5) e (6) como

$$B_\rho = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{3z\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (8)$$

Devido à simetria azimutal do problema, não há componente na direção $\hat{\phi}$, isto é, $B_\phi = 0$.

O campo do ímã é modelado, neste trabalho, pela aproximação de dipolo magnético pontual. Essa descrição é válida no regime de campo distante, quando as dimensões lineares do magneto são pequenas em relação às distâncias envolvidas. No interior do tubo condutor, particularmente quando o raio interno não é muito maior que o comprimento do ímã, podem ocorrer correções associadas à distribuição espacial finita da magnetização e a efeitos de campo próximo.

Optamos por manter a aproximação de dipolo como modelo de primeira ordem, adequado ao propósito didático do trabalho. A discrepância experimental observada da ordem de aproximadamente 12% entre o valor teórico e o valor medido do coeficiente de amortecimento pode refletir, em parte, essa limitação do modelo, além das incertezas experimentais inerentes ao arranjo de bancada.

2.2. Cálculo da força eletromotriz por meio da Lei de Faraday-Lenz

2.2.1. Força eletromotriz de transformador

A Lei de Faraday-Lenz diz que a variação do fluxo magnético através de um circuito condutor fechado produz uma força eletromotriz (f.e.m.) induzida, dada por $\mathcal{E}$. De acordo com esta lei, a f.e.m. induzida em um circuito é igual à taxa de variação temporal do fluxo magnético Φ_B através do circuito, conforme expresso pela equação:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (9)$$

Onde $\mathcal{E}$ é a f.e.m. induzida em volts (V) e Φ_B é o fluxo magnético em webers (Wb). Primeiramente, vamos calcular o fluxo magnético no anel, de raio $\bar{R}$, dado pelo campo magnético descrito na Eq. (7).

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B_z dA = \int_0^{\bar{R}} B_z 2\pi\rho d\rho, \quad (10)$$

onde $dA = 2\pi\rho d\rho$ representa o elemento de área infinitesimal em coordenadas cilíndricas. Substituindo-se a Eq. (7) na Eq. (9), lembrando que $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, obtemos

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 M}{4} \int_0^{\bar{R}} \left(\frac{3z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) 2\rho d\rho. \quad (11)$$

A integral descrita na Eq. (11) pode ser resolvida por meio da substituição $u = \rho^2 + z^2$ e $du = 2\rho d\rho$. Os limites de integração serão: quando $\rho = 0$, $u = z^2$, e quando $\rho = \bar{R}$, $u = \bar{R}^2 + z^2$.

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 M}{4} \int_{z^2}^{\bar{R}^2 + z^2} \left(3z^2 u^{-5/2} - u^{-3/2} \right) du. \quad (12)$$

O fluxo magnético no anel de raio $\bar{R}$ será dado por

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{\bar{R}^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

A força eletromotriz será dada pela Lei de Faraday-Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dz} v, \quad (14)$$

$$\mathcal{E} = \frac{3\mu_0 M}{2} \frac{\bar{R}^2 z}{(\bar{R}^2 + z^2)^{5/2}} v, \quad (15)$$

onde, na Eq. (14) utilizamos a regra da cadeia, além da velocidade $v = \frac{dz}{dt}$ do ímã na direção vertical.

2.2.2. Força eletromotriz de movimento

Quando um anel ou uma espira condutora se move em um campo magnético $\vec{B}$ estático, sabemos que, pela lei de Faraday-Lenz, uma f.e.m. induzida aparece no anel. Se relembrarmos a expressão para a força de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, o campo elétrico induzido é $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = (\vec{v} \times \vec{B})$. Assim, podemos escrever a lei de Faraday-Lenz de uma forma similar, denominada na literatura como f.e.m. de movimento, em contraste com a f.e.m. de “transformador” dada por $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ e estudado na Sec. 2.2.1, cf. [32, 33]. A f.e.m. de movimento pode ser descrita pela Eq. (16)

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (16)$$

Substituindo-se $\vec{v} = v\hat{k}$ e $d\vec{\ell} = \bar{R}d\phi\hat{\phi}$ e lembrando que $\vec{B} = B_\rho\hat{\rho} + B_z\hat{k}$, o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B} = vB_\rho\hat{\phi}$. Substituindo-se na Eq. (16), obtemos

$$\mathcal{E} = \oint_0^{2\pi} vB_\rho \bar{R} d\phi = 2\pi v \bar{R} B_\rho. \quad (17)$$

Substituindo-se a equação para B_ρ obtida na Eq. (8), com $\rho = \bar{R}$, isto é, substituindo-se $B_\rho = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{3z\bar{R}}{(\bar{R}^2 + z^2)^{5/2}}$ na Eq. (17), iremos obter o mesmo resultado da Eq. (15), conforme se pode observar na Eq. (18):

$$\mathcal{E} = \frac{3\mu_0 M}{2} \frac{\bar{R}^2 z}{(\bar{R}^2 + z^2)^{5/2}} v. \quad (18)$$

A Eq. (18) evidencia que, na aproximação adotada, a força eletromotriz induzida é diretamente proporcional à velocidade do ímã, condição essencial para que a força magnética resultante possa ser modelada como um amortecimento efetivo linear em v .

2.3. Cálculo da força que um anel aplica no dipolo

A Fig. 2 mostra um esquema de montagem que será utilizado no experimento. Nesta figura, notamos que o sistema massa-mola está montado no eixo central do tubo. Podemos observar que o tubo deverá ser descrito como um “empilhamento” infinitesimal de anéis e que, posteriormente, devemos fazer variar também a espessura dos anéis diferenciais para que possamos representar corretamente a geometria do tubo de cobre.

A massa acoplada ao sistema massa-mola foi confeccionada em um material plástico, preenchido com massa de moldar. Por tratar-se de material não magnético, sua presença não interfere no campo do ímã nem no processo de indução no tubo condutor. Por simplicidade, iremos fixar o dipolo na origem do sistema de coordenadas e vamos imaginar que o anel de raio $\bar{R}$ cai com velocidade

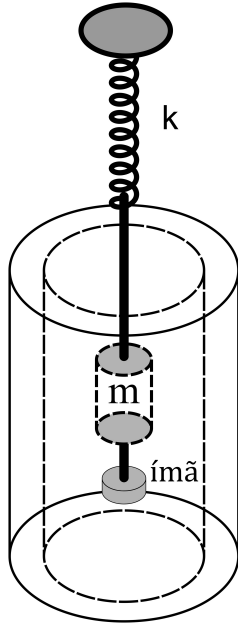


Figura 2: Esquema da montagem experimental: uma mola de rigidez k é acoplada a uma haste rígida de madeira, a uma massa total m e a um ímã.

v com o seu centro alinhado ao eixo axial do dipolo magnético (ímã) na Fig. 2. Pela 3ª lei de Newton, sabemos que a força que o anel faz no dipolo tem o mesmo módulo, a mesma direção e sentido oposto à força que o dipolo faz no anel. Outra observação que pode ser feita é que a simetria cilíndrica do problema implica que a força total está na direção axial do tubo cilíndrico, isto é, está na direção de $\hat{k}$.

A força que o dipolo faz no anel $F_z^{dip} = - \int dF_z^{anel} = - \int I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) = \int IB_\rho d\ell$. O módulo da força total que o tubo de cobre faz no ímã é dado por

$$F_z^{dip} = \int IB_\rho d\ell = 2\pi\bar{R}IB_\rho, \quad (19)$$

em que I é a corrente induzida no anel. Lembrando que para um anel circular de raio $\bar{R}$, o comprimento do condutor ao longo da circunferência é $\ell = 2\pi\bar{R}$. Já conhecemos o valor de B_ρ ; entretanto, precisamos de escrever a corrente em termos das características do problema. Como o anel é de um material condutor com condutividade elétrica dada por σ_e , pela Lei de Ohm, a relação entre a tensão V e a corrente elétrica I é dada por $V = R_{el}I$, isto é, por $I = \frac{V}{R_{el}}$. Como o condutor é um resistor ôhmico, a resistência elétrica R_{el} , medida em Ω , é dada por $R_{el} = \frac{\ell}{\sigma_e A}$, com ℓ o comprimento do resistor em m, σ_e a sua condutividade elétrica dada em S/m, e A a área transversal em m². Assim, $I = \frac{\sigma_e A}{\ell} V$. A quantidade que gostaríamos de calcular é a força total no dipolo devido ao tubo. Para fazermos isso, iremos dividir o tubo em anéis infinitesimais e iremos calcular a força devida a cada contribuição desses anéis.

Nas condições experimentais deste trabalho, o regime eletromagnético pode ser tratado como quase estático. De fato, a profundidade de penetração eletromagnética no cobre,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_e \omega}}, \quad (20)$$

avaliada para a frequência característica do movimento ($\omega \approx 14,7$ rad/s), é da ordem de alguns centímetros, significativamente maior que a espessura do tubo ($t \approx 2,6$ mm). Assim, as correntes induzidas ocupam praticamente toda a seção condutora, e o comportamento elétrico do anel é predominantemente resistivo, justificando a aproximação quase estática adotada na modelagem.

2.4. Cálculo da força total que o tubo metálico faz no dipolo

Cada anel diferencial realiza uma força elementar dF dada por

$$dF = 2\pi\bar{R}B_\rho dI, \quad (21)$$

Ao substituir $dI = \frac{\sigma_e dA}{\ell} \mathcal{E}$, na Eq. (21), obteremos:

$$dF = 2\pi\bar{R}B_\rho \frac{\sigma_e dA}{2\pi\bar{R}} \mathcal{E} = B_\rho \sigma_e \mathcal{E} dA. \quad (22)$$

Lembrando que a Eq. (17) a f.e.m foi escrita como $\mathcal{E} = 2\pi v \bar{R} B_\rho$, portanto, a Eq. (22) será dada por

$$dF = 2\pi\bar{R} \sigma_e v B_\rho^2 dA. \quad (23)$$

Agora, substituindo-se o valor de B_ρ dado na Eq. (8) na Eq. (23), obtemos, para um anel infinitesimal de raio $\bar{R}$

$$dF = v \sigma_e \frac{9\mu_0^2 M^2}{8\pi} \frac{\bar{R}^3 z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz d\bar{R}. \quad (24)$$

Para encontrarmos a força total no dipolo devido ao tubo, devemos integrar a Eq. (24) de forma que os limites de integração descrevam fisicamente o tubo em consideração. Vamos considerar o tubo infinito, isto é, $z \in (-\infty, \infty)$ e de raio interno $\bar{R} = a$ e raio externo $\bar{R} = b$, conforme mostrado na Fig. 1 a).

$$F = \int dF = v \sigma_e \frac{9\mu_0^2 M^2}{8\pi} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{R}^3 z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz d\bar{R}. \quad (25)$$

A integral dupla está resolvida em detalhes no Apêndice, e o seu valor é

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{R}^3 z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz d\bar{R} = \frac{5\pi}{128} \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3} \right). \quad (26)$$

Desse modo, a força total no dipolo realizada pelo tubo será:

$$F = \left(v \sigma_e \frac{9\mu_0^2 M^2}{8\pi} \frac{5\pi}{128} \right) \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3} \right). \quad (27)$$

Portanto,

$$F = \frac{15\mu_0^2 M^2 \sigma_e}{1024} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) v, \quad (28)$$

$$|F(v)| = cv = c\dot{x}, \quad (29)$$

$$c = \frac{15\mu_0^2 M^2 \sigma_e}{1024} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right). \quad (30)$$

O valor obtido para a constante de amortecimento magnético na Eq. (30) é idêntico ao utilizado na Eq. (4) da Ref. [34], determinado em outras Refs. [23, 35], porém, neste trabalho, determinamos essa constante de amortecimento por outro caminho. É interessante notar que esta quantidade é função apenas das características eletromagnéticas do sistema e da geometria do tubo [31].

No experimento, o tubo possui comprimento finito $L = (0,70 \pm 0,01) \text{ m}$, com raios $a = 18,4 \times 10^{-3} \text{ m}$ e $b = 21,0 \times 10^{-3} \text{ m}$. A posição inicial do ímã foi escolhida no centro geométrico do tubo, coincidindo com a posição de equilíbrio do sistema. A amplitude inicial observada foi inferior a 3 cm, conforme mostrado no gráfico experimental. Assim, a menor distância do ímã às extremidades do tubo durante o movimento pode ser estimada por $Z_{\min} = \frac{L}{2} - x_{\max} \approx 0,32 \text{ m}$, com $x_{\max} \lesssim 0,03 \text{ m}$. Na dedução teórica, a integração axial foi estendida para $z \in (-\infty, \infty)$, correspondente à aproximação de tubo infinito. Essa escolha permite obter uma expressão analítica simples para o coeficiente de amortecimento c . Como indicado na Eq. (24), o integrando axial decai como $\sim z^{-8}$ para $|z| \gg \bar{R}$, suprimindo fortemente a contribuição das regiões próximas às extremidades. Para as condições experimentais, tem-se $b/Z_{\min} \ll 1$, tornando desprezível o erro associado a essa aproximação dentro da precisão experimental.

Do ponto de vista experimental, esse resultado mostra que o nível de dissipação pode ser controlado de forma sistemática por meio da geometria do tubo e do material condutor empregado, sem a necessidade de introduzir elementos dissipativos adicionais. Essas previsões teóricas motivam diretamente o experimento descrito a seguir, no qual se investiga se a dinâmica observada do sistema pode ser descrita, dentro das incertezas experimentais, por um modelo de oscilador harmônico amortecido com coeficiente de amortecimento efetivo constante.

3. Parte Experimental

Nesta seção apresentamos os resultados experimentais obtidos para a caracterização do sistema massa-mola-ímã oscilando no interior de um tubo condutor. Na Subseção 3.1, determinamos experimentalmente o momento

de dipolo magnético M dos ímãs de neodímio a partir da medida da força de repulsão magnética em função da distância, utilizando a aproximação de dipolo magnético. Em seguida, na Subseção 3.2, empregamos o valor experimental de M para estimar teoricamente o coeficiente de amortecimento magnético $c(M)$, conforme o modelo eletromagnético desenvolvido na Subseção 2.4. Por fim, na Subseção 3.3, analisamos o movimento amortecido do oscilador e extraímos o coeficiente de amortecimento efetivo c_{fit} a partir do ajuste não linear do sinal temporal, o que permite uma comparação quantitativa direta entre o coeficiente previsto teoricamente e o valor obtido a partir da dinâmica experimental.

3.1. Determinação experimental do momento de dipolo magnético via força de repulsão

A força magnética de repulsão entre dois ímãs idênticos foi medida em função da distância axial entre seus centros. Conforme discutido na Seção Teórica, no regime em que a separação é grande em comparação com as dimensões dos ímãs, a interação pode ser descrita pela aproximação de dipolo magnético, levando a uma dependência funcional $F(x) \propto x^{-4}$. Assim, os dados experimentais foram representados em função de x^{-4} , de modo que a relação teórica se tornasse linear.

Experimentalmente, a força magnética foi obtida a partir da variação da leitura de uma balança digital de alta precisão. Dois ímãs de neodímio idênticos foram dispostos ao longo de um mesmo eixo vertical, com polos magnéticos iguais voltados um para o outro, de modo a produzir uma força de repulsão axial. O ímã inferior foi mantido fixo sobre a balança, enquanto o ímã superior foi acoplado a uma haste vertical com posição ajustável. A distância axial x entre os centros efetivos dos ímãs foi controlada variando-se a altura da haste, garantindo alinhamento aproximadamente coaxial ao longo de todo o intervalo de medidas.

A força magnética foi medida diretamente entre os dois ímãs. A variável x , introduzida no modelo teórico, representa a separação axial efetiva entre os ímãs na aproximação de dipolos magnéticos. Para cada valor de x , a força magnética de repulsão foi determinada a partir da variação da massa indicada pela balança, por meio da relação $F = \Delta m g$, em que $g = 9,783816 \text{ m/s}^2$ corresponde ao valor da aceleração da gravidade medido localmente, no passado, dentro do edifício do Instituto de Ciências Exatas ICEX, com bastante precisão. A distância x foi interpretada como a separação entre os centros magnéticos efetivos dos ímãs; eventuais deslocamentos sistemáticos associados à espessura dos ímãs ou dos suportes estão, em primeira aproximação, incorporados no termo de *offset* do ajuste linear.

No regime em que a separação x é suficientemente grande em relação às dimensões características dos ímãs, a interação magnética pode ser descrita pela aproximação de dipolo magnético. Para dois dipolos idênticos, coaxiais e com momentos efetivos $M_1 = M_2 = M$, o

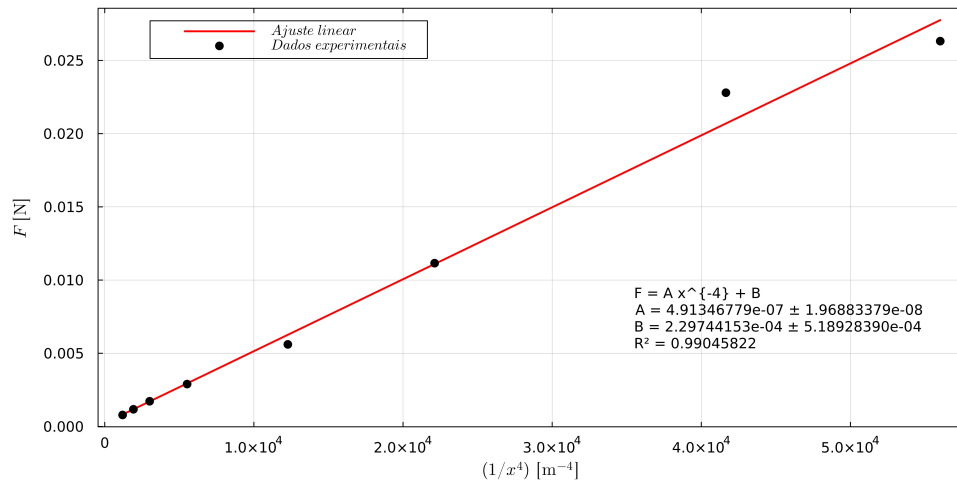


Figura 3: Força magnética de repulsão entre dois ímãs de neodímio em função de x^{-4} . Os pontos representam os dados experimentais e a linha contínua corresponde ao ajuste linear utilizado para a determinação do momento de dipolo magnético. A função de ajuste, assim como os dados obtidos com as respectivas incertezas, está apresentada na legenda.

módulo da força axial de repulsão é dado por

$$F(x) = \frac{3\mu_0 M^2}{2\pi} \frac{1}{x^4}, \quad (31)$$

o que justifica a representação dos dados experimentais em função de x^{-4} e, com isso, nos permite a determinação direta de M a partir do coeficiente angular do ajuste linear.

A Fig. 3 apresenta o gráfico da força magnética medida em função de x^{-4} , juntamente com o ajuste linear obtido pelo método dos mínimos quadrados. A boa linearidade observada confirma a validade da aproximação de dipolo magnético no intervalo de distâncias investigado.

A partir do coeficiente angular A do ajuste linear e da expressão teórica para a força entre dois dipolos coaxiais, o momento de dipolo magnético é dado por

$$M = \sqrt{\frac{2\pi A}{3\mu_0}}. \quad (32)$$

Os dados experimentais da força de repulsão foram analisados por meio de um ajuste linear na variável x^{-4} , de modo que o modelo teórico previsto pela aproximação de dipolo magnético se escreva na forma

$$F = A x^{-4} + B, \quad (33)$$

onde A é o coeficiente angular associado ao termo dominante x^{-4} e B parametriza um possível *offset* experimental, o qual pode refletir pequenas não idealidades de alinhamento, deslocamentos sistemáticos na leitura da balança ou a posição efetiva do centro magnético do conjunto experimental. O ajuste linear forneceu

$$A = (4,9 \pm 0,2) \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^4, \quad (34)$$

$$B = (0,0002 \pm 0,0005) \text{ N}. \quad (35)$$

Observa-se que B é compatível com “zero” (dentro da incerteza), indicando que o comportamento dominante do conjunto de dados é efetivamente governado pelo termo proporcional a x^{-4} . O valor do coeficiente de determinação do ajuste linear obtido foi de $R^2 = 0,9905$. A partir da relação dada pela Eq. (32) e, assumindo que a incerteza dominante provém de A (com μ_0 tratada como constante exata), a propagação de incertezas de primeira ordem fornece

$$\Delta M = \left| \frac{\partial M}{\partial A} \right| \Delta A. \quad (36)$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{3\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{M}{2A}, \quad (37)$$

segue que $\Delta M = \frac{M}{2} \frac{\Delta A}{A}$, ou, de forma equivalente, $\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{2} \frac{\Delta A}{A}$. Para os valores ajustados na Eq. (34), tem-se

$$\frac{\Delta A}{A} = 4,01 \times 10^{-2}, \quad (38)$$

e, portanto,

$$\Delta M = \frac{M}{2} \frac{\Delta A}{A} = 2,00 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (39)$$

Finalmente, obtemos o seguinte valor experimental para o momento de dipolo magnético

$$M = (0,90 \pm 0,02) \text{ A} \cdot \text{m}^2. \quad (40)$$

A determinação experimental do momento magnético M foi realizada por meio de um arranjo simples de força de repulsão entre ímãs, com o objetivo de obter uma estimativa de ordem de grandeza adequada ao contexto didático do trabalho. Não foram consideradas correções

multipolares ou efeitos de campo próximo nessa etapa. Assim, o valor obtido para M deve ser entendido como uma estimativa compatível com a escala dipolar assintótica. Pequenas discrepâncias entre o valor teórico e o valor experimental do coeficiente de amortecimento podem refletir tanto a simplicidade desse procedimento quanto limitações da aproximação dipolar no interior do tubo.

3.2. Estimativa teórica do coeficiente de amortecimento a partir do valor experimental de M

O modelo eletromagnético desenvolvido na Seção 2.4 prevê, para um ímã de momento de dipolo magnético M oscilando no interior de um tubo condutor cilíndrico, um coeficiente de amortecimento dado por

$$c(M) = \frac{15\mu_0^2 M^2 \sigma_e}{1024} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right). \quad (41)$$

Utilizando o resultado da Eq. (40), os raios interno e externo do tubo $a = 18,4 \times 10^{-3} \text{ m}$ e $b = 21,0 \times 10^{-3} \text{ m}$, e a condutividade elétrica do cobre à temperatura ambiente local, $\sigma_e = (5,85 \pm 0,05) \times 10^7 \text{ S/m}$, obtém-se $c(M) = 5,87 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.2.1. Propagação de incertezas em $c(M)$

Definindo o fator geométrico

$$G(a, b) := \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right), \quad (42)$$

podemos escrever $c(M) = K M^2 G(a, b)$, com $K = \frac{15\mu_0^2 \sigma_e}{1024}$. Assumindo μ_0 constante neste estágio e variáveis independentes $\{M, \sigma_e, a, b\}$, a incerteza relativa de primeira ordem é

$$\left(\frac{\Delta c(M)}{c(M)} \right)^2 = \left(2 \frac{\Delta M}{M} \right)^2 + \left(\frac{\Delta G}{G} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e} \right)^2, \quad (43)$$

onde

$$\begin{aligned} (\Delta G)^2 &= \left(\frac{\partial G}{\partial a} \Delta a \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial b} \Delta b \right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{a^4} \Delta a \right)^2 + \left(\frac{3}{b^4} \Delta b \right)^2, \end{aligned} \quad (44)$$

é importante notar que, em sistemas reais, a condutividade elétrica σ_e não é um parâmetro estritamente constante, podendo depender, por exemplo, da temperatura e da pureza do material condutor. Durante o experimento, parte da energia mecânica é dissipada na forma de calor por meio das correntes de Foucault, o que pode levar a um aquecimento gradual do tubo e, consequentemente, a pequenas variações efetivas de σ_e .

Nesta etapa, adotamos as seguintes incertezas $\Delta M = 2,0 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, $\Delta a = \Delta b = 0,05 \text{ mm} = 5,0 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Estas incertezas foram obtidas dos dados da balança e do paquímetro utilizado. Com esses valores, obtém-se: $G(a, b) = 5,25 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$, a incerteza do fator geométrico é $\Delta G = 1,52 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$, portanto, $\frac{\Delta G}{G} = 2,89 \times 10^{-2}$. A incerteza relativa à condutividade elétrica do tubo de cobre é: $\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e} = 8,55 \times 10^{-3}$. Além disso,

$$2 \frac{\Delta M}{M} = 2 \frac{2,0 \times 10^{-2}}{0,90} = 4,44 \times 10^{-2}, \quad (45)$$

de modo que os termos associados à incerteza do momento de dipolo magnético e ao fator geométrico contribuem de forma comparável para a incerteza total. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta c(M) &= c(M) \sqrt{\left(2 \frac{\Delta M}{M} \right)^2 + \left(\frac{\Delta G}{G} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e} \right)^2} \\ &= 3,15 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (46)$$

Portanto,

$$c(M) = (5,9 \pm 0,3) \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (47)$$

3.3. Ajuste do movimento amortecido e determinação do coeficiente c_{fit}

O movimento do sistema massa-mola-ímã no interior do tubo condutor foi registrado como uma função temporal $x(t)$. O sinal experimental apresenta oscilações aproximadamente senoidais com envelope exponencial decrescente, característica de um oscilador subamortecido. Os dados foram ajustados por mínimos quadrados não lineares ao modelo

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + D, \quad (48)$$

em que x_0 é a amplitude inicial em metros, γ é a constante de decaimento do envelope, ω é a frequência angular amortecida, ϕ é a fase inicial e D é um termo de *offset* associado ao zero experimental.

A Fig. 4 apresenta o sinal experimental $x(t)$ em função do tempo t , obtido a partir do registro da posição do oscilador ao longo do movimento vertical, e a curva ajustada pela Eq. (48), evidenciando boa concordância entre o modelo e os dados no intervalo analisado. Este sinal foi obtido por uma interface PASCO Capstone®, versão 2.12.2, ligada a um computador. Mediu-se o tempo de $t \in [0, 4] \text{ s}$ a uma taxa de aquisição de 100Hz. O ajuste dos dados experimentais foi realizado por mínimos quadrados não lineares, utilizando o ambiente Julia. A qualidade do ajuste foi avaliada por meio do erro quadrático médio (RMSE). O ajuste convergiu de forma estável, com um RMSE igual a $RMSE = 2,5 \times 10^{-4}$, e forneceu os seguintes parâmetros de ajuste:

$x_0 = (4,017 \pm 0,005) \times 10^{-2}$, $\gamma = (2,510 \pm 0,007) \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$, $\omega = (14,700 \pm 0,006) \text{ rad/s}$, $\phi = (2,240 \pm 0,001) \text{ rad}$, e $D = (-1,232 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{ m}$.

Com o objetivo de determinar a rigidez da mola k a partir de ω , usamos os valores obtidos pelo ajuste.

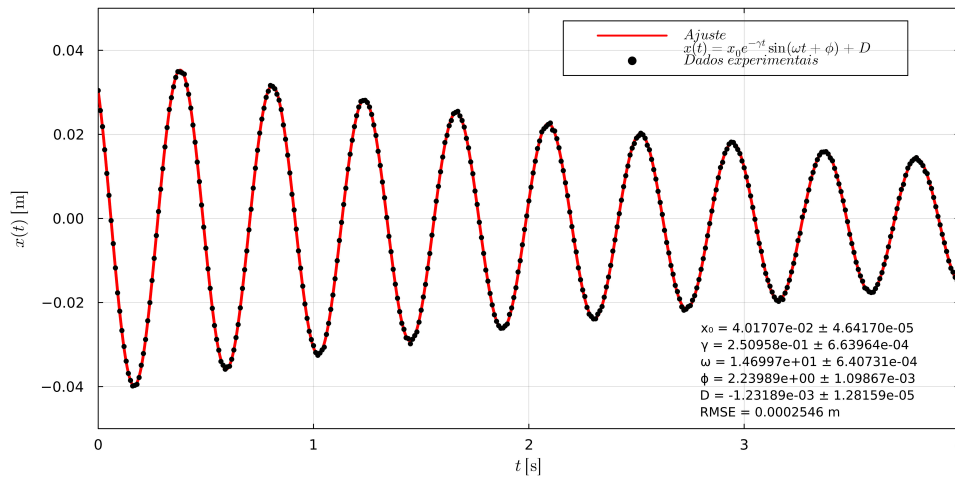


Figura 4: Ajuste não linear do sinal temporal do oscilador amortecido ao modelo $x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + D$, para $t \in [0, 4]s$ e com uma frequência de aquisição de dados igual a 100Hz. Os dados obtidos no ajuste com as respectivas incertezas estão apresentados no gráfico.

Assumindo um regime subamortecido, a frequência angular amortecida ω satisfaz $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, isto é, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, de modo que

$$k = m(\omega^2 + \gamma^2). \quad (49)$$

Considerando-se k como função das variáveis independentes m , ω e γ e, usando os valores obtidos no ajuste, a rigidez da mola utilizada no experimento é

$$k = (22,3 \pm 0,1) \text{ N/m}. \quad (50)$$

3.3.1. Determinação do coeficiente c_{fit} a partir do ajuste não linear

Comparando o envelope exponencial do regime subamortecido,

$$\gamma = \frac{c}{2m}, \quad (51)$$

onde m é a massa do sistema oscilante. Observando-se o modelo ajustado da Eq. (48), identifica-se

$$\gamma = \frac{c_{\text{fit}}}{2m}, \quad \Rightarrow \quad c_{\text{fit}} = 2m\gamma. \quad (52)$$

Usando os valores obtidos no ajuste, obtemos o valor central

$$c_{\text{fit}} = 2(0,1030)(0,2510) = 5,1706 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (53)$$

3.3.2. Propagação de incertezas em c_{fit}

Tratando $c_{\text{fit}} = 2m\gamma$ como função de m e γ independentes, a propagação de incertezas de primeira ordem fornece

$$(\Delta c_{\text{fit}})^2 = (2\gamma \Delta m)^2 + (2m \Delta \gamma)^2. \quad (54)$$

As contribuições são

$$2\gamma \Delta m = 2(0,2510)(5,0 \times 10^{-4}) = 2,51 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (55)$$

$$2m \Delta \gamma = 2(0,1030)(7,0 \times 10^{-4}) = 1,44 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (56)$$

Assim, a incerteza é dada por

$$\Delta c_{\text{fit}} = \sqrt{(2,51 \times 10^{-4})^2 + (1,44 \times 10^{-4})^2}, \quad (57)$$

$$= 2,89 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (58)$$

Portanto,

$$c_{\text{fit}} = (5,17 \pm 0,03) \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (59)$$

Os valores obtidos no experimento satisfazem explicitamente a condição $c_{\text{fit}}^2 < 4mk$, o que confirma que o sistema opera no regime subamortecido, em plena concordância com a forma funcional observada do sinal temporal.

O coeficiente ajustado experimentalmente corresponde ao amortecimento efetivo total do sistema, que inclui tanto contribuições não magnéticas (arrasto viscoso do ar e perdas mecânicas no conjunto massa-mola) quanto a contribuição viscosa-magnética associada às correntes induzidas no tubo. Testes preliminares realizados com um ímã de menor magnetização (N35) indicaram que o amortecimento total do sistema já era baixo, o que sugeriria que as perdas não magnéticas são pequenas no intervalo de tempo característico observado. Assim, no regime experimental considerado, a contribuição magnética constitui o principal mecanismo dissipativo.

A dependência linear da força dissipativa com a velocidade, Eq. (29), isto é, $F = cv$, foi verificada no intervalo de amplitudes utilizado no experimento,

não sendo observada evidência de comportamento não linear no regime analisado. Uma investigação sistemática da dependência do coeficiente de amortecimento com a amplitude inicial constitui uma extensão natural desta atividade e pode ser explorada em contexto de laboratório didático.

4. Conclusões

Neste trabalho, investigamos experimentalmente o amortecimento magnético de um ímã de neodímio oscilando no interior de um tubo de cobre. A partir da Lei de Faraday-Lenz, a força magnética induzida foi modelada como uma força dissipativa efetiva proporcional à velocidade, permitindo descrever o sistema como um oscilador harmônico amortecido em regime subamortecido. Esse modelo viabilizou a determinação do coeficiente de amortecimento magnético por dois procedimentos independentes: uma estimativa teórica, baseada no momento de dipolo magnético do ímã e nos parâmetros geométricos do tubo, e uma determinação experimental direta, obtida a partir do ajuste não linear da dinâmica temporal do movimento.

O momento de dipolo magnético foi determinado experimentalmente como

$$M = (0,90 \pm 0,02) \text{ A} \cdot \text{m}^2, \quad (60)$$

a partir da medida da força de repulsão entre dois ímãs idênticos. Com base nesse valor, o modelo eletromagnético prevê um coeficiente de amortecimento

$$c(M) = (5,9 \pm 0,3) \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (61)$$

Por sua vez, a análise do movimento amortecido do sistema massa-mola-ímã forneceu, a partir do ajuste direto do sinal temporal,

$$c_{\text{fit}} = (5,17 \pm 0,03) \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (62)$$

A comparação entre $c(M)$ e c_{fit} revela uma diferença relativa da ordem de aproximadamente 12%, com $c_{\text{fit}} < c(M)$. Essa discrepância deve ser interpretada como resultado da combinação de múltiplas contribuições sistemáticas de pequena magnitude, compatíveis com as aproximações adotadas. Entre os fatores relevantes destacam-se: (i) a utilização da aproximação de dipolo pontual para um ímã de dimensões finitas, particularmente no regime de campo próximo no interior do tubo; (ii) a natureza rudimentar da determinação experimental do momento magnético por meio do arranjo de força de repulsão; (iii) a incerteza associada à condutividade elétrica do cobre comercial; e (iv) a presença de amortecimento não magnético residual, como arrasto do ar e perdas mecânicas no sistema massa-mola.

Além desses fatos, o modelo teórico assume tubo efetivamente infinito e alinhamento axial ideal, hipóteses que simplificam a análise, mas que não são rigorosamente

satisfeitas no arranjo experimental. A contribuição acumulada dessas aproximações é compatível com a diferença percentual observada (típica de resultados obtidos em bancadas de física experimental da graduação). Os dois procedimentos empregados apresentam sensibilidades distintas a erros sistemáticos. Em contraste, a determinação de c por meio do ajuste temporal utiliza um grande conjunto de dados ao longo da evolução dinâmica, o que proporciona maior robustez estatística e reprodutibilidade.

Apesar dessas limitações, a concordância quantitativa entre os valores obtidos teoricamente e experimentalmente sustenta o uso deste sistema como uma ferramenta didática eficaz para a discussão integrada de indução eletromagnética, amortecimento viscoso e análise de incertezas em física experimental. A discrepância residual observada não invalida o modelo proposto, mas evidencia de forma instrutiva o papel de efeitos não idealizados, o que reforça a consistência global da abordagem e a adequação do experimento ao contexto de ensino.

4.1. Perspectivas para trabalhos futuros

Para aprofundar a investigação e ampliar o escopo experimental e teórico do sistema estudado, sugerem-se as seguintes extensões:

- Realizar testes sistemáticos das variáveis previstas pelo modelo eletromagnético, $c \propto \sigma_e$ e $c \propto \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$, por meio da utilização de tubos com diferentes materiais e espessuras, variando explicitamente os parâmetros geométricos a e b .
- Investigar explicitamente o regime eletromagnético por meio do cálculo e controle experimental da profundidade de penetração $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \sigma_e \omega)}$, para explorar a transição entre regimes predominantemente resistivos e indutivos.
- Avaliar experimentalmente a linearidade da força dissipativa com a velocidade, isto é, analisar a dependência do coeficiente efetivo c da amplitude inicial do movimento.
- Desenvolver modelagem mais refinada do campo do ímã, para incorporar sua geometria cilíndrica finita e possíveis correções multipolares, bem como efeitos de borda associados ao comprimento finito do tubo.
- Quantificar separadamente as contribuições de amortecimento não magnético (arrasto do ar e perdas mecânicas) e do amortecimento magnético, por meio de experimentos comparativos sem o tubo condutor.
- Investigar o efeito da histerese magnética em materiais ferromagnéticos e sua influência no amortecimento total.
- Estudar a dinâmica rotacional do ímã e quantificar o torque magnético associado ao movimento giratório e sua eventual contribuição dissipativa.

- Utilizar o experimento de queda livre do ímã no interior do tubo para determinar a velocidade terminal e comparar com o coeficiente viscoso extraído do regime oscilatório.
- Explorar a dependência do amortecimento com a temperatura do tubo, variando controladamente a condutividade elétrica $\sigma_e(T)$, estabelecendo conexão entre dissipação, aquecimento e propriedades elétricas do material.

O conjunto dessas extensões permite transformar o arranjo aqui apresentado em uma plataforma experimental versátil, adequada tanto para fins didáticos quanto para investigações mais aprofundadas sobre dissipação eletromagnética e modelagem física de sistemas reais.

Agradecimentos

ATC agradece: RAU N° 12 – 2016-AY-UNA, Perú.

Apêndice

Neste Apêndice, iremos resolver a integral mostrada na Eq. (26).

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{R}^3 z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz d\bar{R}, \quad (\text{A.1})$$

Passo 1: Resolver a Integral Interna. Primeiro, consideramos a integral interna:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz. \quad (\text{A.2})$$

Com o objetivo de evitar substituições trigonométricas tediosas, podemos utilizar uma equação apropriada para resolver esta integral e que pode ser encontrada na tabela de integrais de Gradshteyn e Ryzhik, Seção 3.251, Eq. 4. cf. Ref. [36]:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{(ax^2 + c)^n} dx, \quad (\text{A.3})$$

a equação é

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{(ax^2 + c)^n} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(n - m - \frac{1}{2})}{a^{m+\frac{1}{2}}c^{n-m-\frac{1}{2}}\Gamma(n)}, \quad (\text{A.4})$$

onde $a = 1$, $c = \bar{R}^2$, $m = 1$ e $n = 5$. Aplicando estes valores na Eq. (A.4), iremos obter

$$\int_0^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + \bar{R}^2)^5} dz = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})\Gamma(5 - 1 - \frac{1}{2})}{(1)^{1+\frac{1}{2}}(\bar{R}^2)^{5-1-\frac{1}{2}}\Gamma(5)}. \quad (\text{A.5})$$

Simplificando as funções gama:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma\left(5 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \quad (\text{A.7})$$

e

$$\Gamma(5) = 24. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo esses valores, teremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + \bar{R}^2)^5} dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + \bar{R}^2)^5} dz \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{15\sqrt{\pi}}{8}}{\bar{R}^7 \cdot 24} = \frac{5\pi}{128\bar{R}^7}. \quad (\text{A.10})$$

Vamos incluímos o fator $\bar{R}^3$:

$$\bar{R}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + \bar{R}^2)^5} dz = \bar{R}^3 \cdot \frac{5\pi}{128\bar{R}^7} = \frac{5\pi}{128\bar{R}^4}. \quad (\text{A.11})$$

Agora integramos com respeito a $\bar{R}$:

$$\int_a^b \frac{5\pi}{128\bar{R}^4} d\bar{R}. \quad (\text{A.12})$$

Esta integral pode ser avaliada da seguinte forma:

$$\frac{5\pi}{128} \int_a^b \frac{1}{\bar{R}^4} d\bar{R} = \frac{5\pi}{128} \left[-\frac{1}{3\bar{R}^3} \right]_a^b. \quad (\text{A.13})$$

Simplificando, teremos:

$$\frac{5\pi}{128} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3a^3} \right) = \frac{5\pi}{128} \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3} \right). \quad (\text{A.14})$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{R}^3 z^2}{(\bar{R}^2 + z^2)^5} dz d\bar{R} = \frac{5\pi}{128} \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3b^3} \right). \quad (\text{A.15})$$

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo é simples e está integralmente contido no próprio artigo.

Referências

- [1] J.B. Marion e S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Brooks/Cole, Boston, 2004), 5 ed.
- [2] J.R. Taylor, *Classical Mechanics* (University Science Books, New York, 2005).
- [3] D.H. Nguyen e N.S. Rebello, US-China Education Review **8**, 559 (2011).
- [4] H. Nuhoğlu, The Turkish Online Journal of Educational Technology **7**, 22 (2008).
- [5] J.E. Escalante-Martínez, J.F. Gómez-Aguilar, C. Calderón-Ramón, L.J. Morales-Mendoza, I. Cruz-Orduña e J.R. Laguna-Camacho, *Advances in Mechanical Engineering* **8**, 1 (2016).

- [6] W.M. Saslow, American Journal of Physics **60**, 693 (1992).
- [7] M.A. Heald, American Journal of Physics **52**, 522 (1984).
- [8] A. Doff e R.M. Szmoski, Revista Brasileira de Ensino de Física **45**, e20230181 (2023).
- [9] M.A. Heald, American Journal of Physics **56**, 521 (1988).
- [10] L. V. Montanheiro, F. Tomazi e C. A. Dartora, Revista Brasileira de Ensino de Física **46**, e20240123 (2024).
- [11] P.R. Bevington e D.K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw-Hill, New York, 2003), 3 ed.
- [12] G.G. Stokes, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **9**, 8 (1851).
- [13] P. Blondeaux, Journal of Fluid Mechanics **919**, A36 (2021).
- [14] D. Pritchard, C.R. McArdle e S.K. Wilson, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **166**, 745 (2011).
- [15] R.C. Hibbeler, *Dinâmica: mecânica para engenharia* (Pearson, Rio de Janeiro, 2011), 12 ed.
- [16] F.P. Beer e E.R. Johnston Jr., *Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica* (McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 2006), 7 ed.
- [17] J.L. Meriam, L.G. Kraige e J.N. Bolton, *Engineering Mechanics: Dynamics* (Wiley, Hoboken, 2018), 9 ed.
- [18] S.S. Rao, *Mechanical Vibrations* (Pearson, London, 2017), 6 ed.
- [19] D.J. Inman, *Engineering Vibration* (Pearson, London, 2013), 4 ed.
- [20] S. Jain, P. Rathi e M. Ramachandran, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. **810**, 012042 (2020).
- [21] B. Irvine, M. Kemnetz, A. Gangopadhyaya e T. Ruubel, Magnet traveling through a conducting pipe: A variation on the analytical approach. Am. J. Phys. **1 82**, 4 (2014).
- [22] J. Franek e M. Soka, Turkish Journal of Physics **42**, 2 (2018).
- [23] G. Donoso, C.L. Ladera e P. Martin, European Journal of Physics **30**, 855 (2009).
- [24] G. Donoso, C.L. Ladera e P. Martín, American Journal of Physics **79**, 193 (2011).
- [25] Y. Levin, S.L. Da Silveira e F.B. Rizzato, American Journal of Physics **74**, 815 (2006).
- [26] M. Bezerra, W.J.M. Kort-Kamp, M.V. Cougo-Pinto e C. Farina, European Journal of Physics **33**, 1313 (2012).
- [27] K. Seleznyova, M. Strugatsky e J. Kliava, European Journal of Physics **37**, 025203 (2016).
- [28] A.J. Petruska e J.J. Abbott, IEEE Transactions on Magnetics **49**, 811 (2013).
- [29] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017), 4 ed.
- [30] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1999), 3 ed.
- [31] J.R. Reitz, Journal of Applied Physics **41**, 2067 (1970).
- [32] W.H. Hayt e J.A. Buck, *Eletromagnetismo* (Bookman, Porto Alegre, 2013), 8 ed.
- [33] M.N.O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo* (Bookman, Porto Alegre, 2012), 5 ed.
- [34] P. Ferfecki, M. Konecny, M. Molcan e J. Zapomel, Manufacturing Technology **20**, 714 (2020).
- [35] H.E. Knoepfel, *Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use* (Wiley-Interscience, New York, 2000).
- [36] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, Amsterdam, 2007), 7 ed.