

Algoritmo de refração: uma proposta didática para investigação do problema de minimização do tempo

Refraction algorithm: a proposal for a didactic sequence to investigate the time minimization problem

F.R. Manhães¹, V.J. Monteiro¹, E.T. Costa¹, L.V.P.C. Lima¹, Enrique Arias¹,
J.C.G. Tedesco^{*1}, G.A. Monerat¹

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Nova Friburgo, RJ, Brasil.

Recebido em 17 de abril de 2025. Revisado em 22 de julho de 2025. Aceito em 13 de setembro de 2025.

Este artigo apresenta uma proposta didática centrada na modelagem computacional do fenômeno de refração da luz, com base no Princípio de Fermat. Utilizando o software livre Octave, o estudo explora simulações que permitem determinar a trajetória de menor tempo da luz ao atravessar diferentes meios. O algoritmo desenvolvido possibilita a comparação quantitativa entre os resultados obtidos pela abordagem de Fermat e os valores previstos pela Lei de Snell-Descartes. A atividade é estruturada para favorecer o desenvolvimento de habilidades como raciocínio lógico, interpretação gráfica e análise de dados, além de incentivar a integração entre conceitos de Física, Matemática e computação. A proposta inclui uma sequência didática e materiais complementares que auxiliam sua aplicação e permitem adaptar a atividade a diferentes contextos educacionais, promovendo o uso de tecnologias no ensino de Ciências e uma aprendizagem alinhada às habilidades contemporâneas.

Palavras-chave: Princípio de Fermat, refração da luz, modelagem computacional, ensino de Física, Octave.

This article presents a didactic proposal centered on the computational modeling of the phenomenon of light refraction, based on Fermat's Principle. Using the free software Octave, the study explores simulations that determine the light path of least time when crossing different media. The developed algorithm enables a quantitative comparison between the results obtained through Fermat's approach and the values predicted by Snell's Law. The activity is structured to foster the development of skills such as logical reasoning, graphical interpretation, and data analysis, while also encouraging the integration of concepts from Physics, Mathematics, and Computing. The proposal includes a didactic sequence and complementary materials to support its implementation and allow for adaptation to different educational contexts, promoting the use of technology in science education and fostering learning aligned with contemporary competencies.

Keywords: Fermat's Principle, light refraction, computational modeling, Physics teaching, Octave.

1. Introdução

O ensino de Física tem vivenciado transformações significativas, impulsionadas pela integração de novas tecnologias no ambiente educacional. As simulações numéricas permitem que os alunos experimentem hipóteses e observem os efeitos das relações matemáticas na descrição de fenômenos físicos de maneira interativa. A modelagem computacional torna acessíveis conceitos abstratos ao viabilizar representações visuais em tempo real [1]. Nesse contexto, a utilização de softwares livres permite que escolas sem recursos repliquem a atividade sem custos, viabilizando uma estratégia pedagógica alternativa para despertar a curiosidade nos estudantes, permitindo que interajam diretamente com os modelos e variáveis dos fenômenos, modifiquem e adaptem o código à sua realidade educacional [2].

A teoria do Princípio de Fermat explica o fenômeno da refração da luz e é um exemplo emblemático de integração entre teoria física e ferramentas tecnológicas. Esse princípio estabelece que a luz segue o caminho que demanda o menor tempo para ser percorrido, e sua aplicação é fundamental em áreas como ótica, geofísica e tecnologia da informação [3]. Ao traduzir esse princípio em problemas computacionais, os estudantes podem explorar conceitos de minimização e otimização, ao mesmo tempo que desenvolvem habilidades matemáticas e digitais [4].

Este artigo apresenta uma abordagem pedagógica centrada na simulação computacional da refração da luz, fundamentada no Princípio de Fermat e desenvolvida com o software livre Octave [5], cuja sintaxe semelhante à linguagem matemática contribui para a redução da curva de aprendizado.

O público-alvo varia conforme o tempo disponível e o grau de aprofundamento escolhido. Em princípio, estudantes com domínio prévio de trigonometria e funções

*Endereço de correspondência: tedesco@iprj.uerj.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

são capazes de acompanhar as atividades propostas. No entanto, reconhece-se que a exigência de conhecimentos básicos em programação pode representar um desafio adicional, limitando sua aplicação no ensino básico. Por outro lado, no ensino superior – especialmente entre alunos que já cursaram disciplinas de cálculo, física e introdução à programação – esta proposta pode ser empregada como complemento ou atividade diversificada durante o estudo da óptica.

O artigo inicia com uma breve contextualização histórica da óptica geométrica, destacando sua relevância para a construção dos conceitos científicos. Ao alinhar modelagem matemática e tecnologia, a proposta promove um ambiente de aprendizagem dinâmico e interdisciplinar. A sequência didática (Anexo A) busca ilustrar uma abordagem de atividade possível, estimulando habilidades como raciocínio lógico, análise gráfica, interpretação de dados, associação entre modelo computacional e fenômeno físico.

Os estudantes são convidados a explorar o algoritmo, compreendendo, de forma interativa e reflexiva, a relação entre o Princípio de Fermat e a Lei de Snell-Descartes. Embora o foco esteja na utilização de uma ferramenta previamente desenvolvida, o docente pode optar por envolver os alunos na construção guiada do algoritmo, adaptando a estrutura apresentada ou utilizando outras linguagens de programação, conforme o contexto educacional e os objetivos didáticos. A proposta visa incentivar a exploração ativa e a compreensão aplicada dos conceitos físicos.

O texto está organizado com foco na clareza e aplicabilidade. Os capítulos II, III e IV abordam os fundamentos físicos e os resultados das simulações; a conclusão é apresentada na seção V. Os Anexos A, B e C reúnem os materiais complementares – sequência didática, tutorial do algoritmo e o código-fonte – necessários à implementação prática da proposta.

2. O Modelo de Refração de Snell-Descartes

A história da Lei de Snell é repleta de nomes que deram colaborações significativas ao longo dos séculos. Em Alexandria, no Egito antigo, Ptolomeu investigou experimentalmente a relação entre os ângulos de refração na interface ar-água. No entanto, suas conclusões apresentavam imprecisões [6]. Assim, a lei da refração foi um dos poucos fenômenos explorados experimentalmente pelos gregos, conhecidos principalmente pelo raciocínio lógico-dedutivo das leis da natureza [7]. Muitos anos depois, na Idade de Ouro Islâmica, Ibn al-Haytham e Ibn Sahl deram grandes contribuições em seus estudos sobre ótica, [8, 9], aplicando seus resultados no desenvolvimento de lentes.

Já no século XVII, o tema ganhou novo fôlego com as pesquisas de diversos outros estudiosos [10]. Em 1621, o holandês Willebrord Snellius van Royen, conhecido

como Snell, elaborou uma formulação matemática equivalente à lei que leva seu nome [11]. Paralelamente, o francês René Descartes chegou a resultados semelhantes de maneira independente, publicando-os em seu ensaio *Discours de la Méthode*, em 1637 [12]. A autoria da lei foi alvo de debates, pois o trabalho de Snell só foi divulgado postumamente no livro *Dióptrique*, de Christiaan Huygens, em 1653 [13]. Descartes foi acusado de ter se apropriado das ideias de Snell, embora não existam provas conclusivas sobre isso [14].

Pierre de Fermat reformulou a abordagem de Descartes e Snell e propôs uma derivação alternativa fundamentada em seu princípio do tempo mínimo [15]. Fermat assumiu que a trajetória percorrida pela luz entre dois pontos, na passagem de um meio para outro, é tal que o tempo gasto para a percorrer é mínimo. Sua teoria não trouxe apenas uma abordagem diferente para o problema da refração, mas também teve implicações relevantes em outras áreas da Física [16]. Podemos dizer que o princípio de Fermat representa um dos primeiros exemplos de um princípio de otimização aplicado a uma lei física, servindo como inspiração para a reformulação da mecânica clássica proposta por Euler e Lagrange, fundamentada no Princípio da Mínima Ação [7].

Há duas leis que regem a reflexão da luz. A primeira estabelece que o raio incidente, o raio refletido e a normal à superfície no ponto de incidência pertencem ao mesmo plano. A segunda determina que os ângulos de incidência e de reflexão são. Essas condições são relativamente simples e podem ser compreendidas com o auxílio da geometria, bem como as leis de conservação de energia e do momento [17]. Assim, conforme ilustrado na Figura 1, $\theta_1 = \theta_3$.

Por outro lado, quando a superfície representa uma transição entre meios em que a luz se propaga com velocidades diferentes, ocorre o fenômeno da refração. Assim, é possível caracterizar uma grandeza que relaciona esta mudança para cada meio, o índice de refração absoluto, n , dado pela razão entre a velocidade da luz no vácuo, c , e a velocidade da luz no meio em questão, v , que é conhecida como 1ª lei de refração [17].

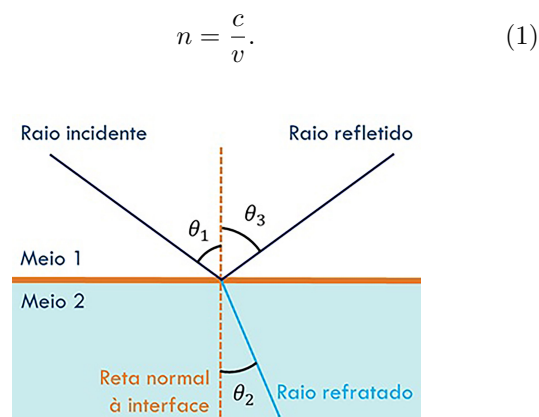


Figura 1: Representação esquemática da reflexão e refração em dois meios distintos, segundo a óptica geométrica.

Vale lembrar que, como a velocidade da luz tem seu maior valor no vácuo e, fisicamente, n mede o quanto esse valor é reduzido no interior de determinado meio, o índice de refração é sempre maior ou igual a 1. Além disso, pela análise da Equação (1), percebe-se que quanto maior o índice de refração, menor a velocidade de propagação da luz no meio.

Assim como na reflexão, o raio refratado também permanece no mesmo plano formado pelos raios de incidência e reflexão e a reta normal. Esta é conhecida como a 1ª lei de refração. Experimentalmente é possível observar que quanto menor a velocidade da luz no meio refratado, menor o ângulo entre o raio refratado e a reta normal, indicando uma refração mais acentuada.

A razão entre os senos dos ângulos de incidência e de refração, formados pelos raios de incidência e de refração, com a reta normal é sempre constante, e essa constante é também a razão entre o índice de refração do meio 2, n_2 , com o índice de refração do meio 1, n_1 [17]. Equacionando essa ideia, podemos escrever a Equação (2).

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \text{constante}. \quad (2)$$

Sendo a luz um fenômeno ondulatório, a mudança na sua velocidade está relacionada à mudança em suas características. Quando a luz se propaga de um meio a outro, e quando não há perda de energia, sua frequência se mantém inalterada. Contudo, seu comprimento de onda muda, alterando assim sua velocidade de propagação.

Sabe-se que, pela equação fundamental da ondulação, a velocidade de propagação de uma onda está diretamente relacionada com a sua frequência, f , e seu comprimento de onda, λ , ou seja, $v = f \cdot \lambda$. Assim, usando a Equação (2), é possível escrever a Equação (3).

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{f \cdot \lambda_1}{f \cdot \lambda_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3)$$

Algumas outras relações podem ser extraídas da Equação (3). A primeira delas se refere aos comprimentos de onda e os índices de refração, $\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$. A outra expressão é mais conhecida e relaciona os ângulos de incidência e de refração com os índices de refração, conforme a Equação (4).

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2). \quad (4)$$

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5)$$

A Equação (4) é a 2ª lei de refração é mais difundida e conhecida como Lei de Snell-Descartes. Na seção seguinte apresentamos uma outra abordagem sugerida por Fermat para a refração da luz que interpreta o fenômeno de refração como um processo de otimização do tempo usado pela luz no seu percurso entre dois

pontos do espaço. Seu resultado será comparado com a Equação (5) usando o algoritmo disponibilizado no Anexo C.

3. O Modelo de Refração de Fermat

Em 1657, Pierre Fermat propôs uma nova forma de descrever o fenômeno de refração. Segundo ele, quando um raio de luz atravessa uma interface que divide dois meios distintos, ele sofre um desvio em relação a sua direção de propagação de modo a percorrer o caminho de menor tempo entre dois pontos. Esta forma de perceber esse comportamento é comentada em diversos livros didáticos, como o livro “Óptica” de Eugene Hecht [11]. Assim, as leis da reflexão e da refração são compreendidas a partir de uma perspectiva diferente sob este ponto de vista proporcionado pelo Princípio de Fermat.

Para ilustrar este fato, considere o problema a seguir. Vamos supor que um raio de luz saia de um ponto $P = (P_x, P_y)$ localizado no meio 1, e vá até o ponto $Q = (Q_x, Q_y)$ que se encontra no meio 2, passando por $\mathfrak{R} = (R_x, R_y)$ um ponto da interface entre os meios. Enquanto P e Q são fixos conforme esquematizado na Figura 2, e o ponto $\mathfrak{R}$ terá a coordenada em x_i variável. A pergunta que queremos responder é: dados os índices de refração dos meios 1 e 2, representados por n_1 e n_2 , qual o valor de x_i onde a luz percorre o caminho $\overline{P\mathfrak{R}Q}$ no menor intervalo de tempo? Como outros problemas em Física, trata-se de um problema de minimização.

Uma das formas de responder esta pergunta seria calcular o tempo que a luz leva para viajar entre P e Q nos vários percursos possíveis cruzando a interface entre os meios em x_i . Uma vez que se conhece o valor de x_i que minimize o tempo de percurso da luz, é possível calcular os ângulos θ_1 e θ_2 , o que nos permite verificar a Lei de Snell-Descartes.

Os comprimentos dos caminhos $\overline{P\mathfrak{R}}$ e $\overline{\mathfrak{R}Q}$ (denominados S_1 e S_2 , respectivamente) são calculados a partir das coordenadas dos pontos P e Q . Estes pontos serão usados na implementação no algoritmo computacional

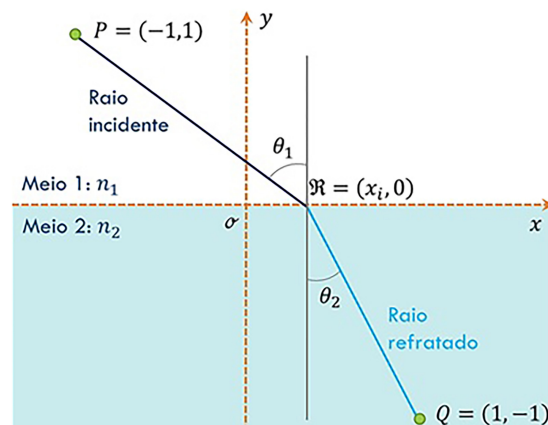


Figura 2: Modelo de refração de Fermat.

apresentado mais à frente. Para o caminho $\overline{P\mathfrak{R}}$, assumindo $P = (-1, 1)$, $Q = (1, -1)$ e $\mathfrak{R} = (x_i, 0)$, a Equação (6) expressa S_1 em função da abscissa x_i .

$$S_1 = \overline{P\mathfrak{R}} = \sqrt{(R_x - P_x)^2 + (R_y - P_y)^2} = \sqrt{x_i^2 + 2x_i + 2}. \quad (6)$$

Analogamente, para o caminho $\overline{\mathfrak{R}Q}$, a Equação (7) indica a dependência de S_2 com x_i .

$$S_2 = \overline{\mathfrak{R}Q} = \sqrt{(Q_x - R_x)^2 + (Q_y - R_y)^2} = \sqrt{x_i^2 - 2x_i + 2}. \quad (7)$$

Conhecendo a velocidade da luz em cada meio, é possível calcular o tempo total do percurso. Denominando de t_1 e t_2 os tempos em cada trecho, e considerando que como a velocidade da luz não muda ao longo do percurso dentro de um meio, é possível afirmar que o tempo total, t , é a soma dos tempos nos trechos S_1 e S_2 .

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2}. \quad (8)$$

Da Equação (1), $1/v_1 = n_1/c$ e $1/v_2 = n_2/c$. Substituindo esses valores na Equação (8), e usando as Equações (6) e (7), encontra-se a expressão a seguir.

$$t = \frac{1}{c}(S_1 n_1 + S_2 n_2)$$

$$t(x_i) = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{x_i^2 + 2x_i + 2} + n_2 \sqrt{x_i^2 - 2x_i + 2} \right). \quad (9)$$

Como n_1 , n_2 e c são constantes, a Equação (9) indica que o tempo é uma função explícita da abscissa do ponto $\mathfrak{R}$, $t(x_i)$. Logo, para descobrir o caminho de menor tempo basta encontrar o valor de $x_i = x_0$ que minimize a função $t(x_i)$, ou seja, derivando-a em termos de x_i e verificando os valores de x_i onde $t(x_i = x_0)$ é nula. Fazendo isso, encontramos a expressão abaixo.

$$\frac{n_1^2(x_0 + 1)^2}{x_0^2 + 2x_0 + 2} = \frac{n_2^2(x_0 - 1)^2}{x_0^2 - 2x_0 + 2}. \quad (10)$$

Encontrar x_0 a partir da Equação (10) analiticamente pode não ser uma tarefa simples em uma abordagem analítica. Assim, a proposta aqui é implementar uma rotina computacional que calcule diversos valores $t(x_i)$ usando a Equação (9), ou seja, considerando $P = (-1, 1)$, $Q = (1, -1)$ e $\mathfrak{R} = (x_i, 0)$, que define que a linha de mudança de meio é sempre na ordenada nula. Com diversos valores de $t(x_i)$, é possível compará-los e ordená-los do menor para o maior, de modo a encontrar x_0 . Desta forma, será possível calcular os senos dos ângulos de incidência e refração, e a relação entre eles, conforme a Equação (11), e comparar a abordagem

de Fermat com a Lei de Snell-Descartes, Equação (5), validando e verificando as teorias aqui descritas.

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= \frac{|1 + x_0|}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 2}} & \sin(\theta_2) &= \frac{|1 - x_0|}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 2}} \\ \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} &= \frac{|1 + x_0|}{|1 - x_0|} \frac{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 2}}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Este procedimento pode ser, além de outros motivos, importante para a visualização dos conceitos teóricos tratados. Nos Anexos B e C pode ser encontrado o algoritmo inteiramente descrito que foi desenvolvido e implementado para tal.

4. Resultados Obtidos

Apresentada a fundamentação física descrita na seção anterior e considerando a estrutura do algoritmo desenvolvido e detalhado no Anexo B – cujo código fonte completo encontra-se no Anexo C), esta seção concentra-se na análise dos resultados obtidos por meio da execução da proposta computacional. Os dados gerados a partir da simulação do Princípio de Fermat aplicado à refração da luz demonstram não apenas a coerência da abordagem com a Lei de Snell-Descartes, mas também evidenciam o potencial didático do material, reforçando sua relevância para fins pedagógicos.

Para docentes interessados em aplicar esta abordagem, o algoritmo pré-desenvolvido oferece flexibilidade para uso em atividades diversificadas. As orientações de execução e uma proposta de atividade estão detalhadas no Anexo A. Este trabalho valoriza a exploração prática da ferramenta, permitindo que os estudantes manipulem parâmetros, visualizem trajetórias da luz e analisem os tempos de percurso como forma de compreender o fenômeno da refração. Essa proposta busca favorecer a interpretação dos resultados e a assimilação dos conceitos físicos envolvidos, sem exigir conhecimentos avançados em programação [18].

Como alternativa e desafio adicional, professores e estudantes podem optar pela construção guiada do algoritmo como parte do processo de aprendizagem. A estrutura apresentada neste artigo pode servir de base, podendo ainda ser adaptada para outras linguagens de programação. Embora essa abordagem demande maior disponibilidade de tempo e conhecimento prévio em programação, ela estimula o desenvolvimento de habilidades complementares, como o raciocínio lógico, a depuração de código e a criação de algoritmos, ampliando a formação dos alunos no contexto interdisciplinar proposto.

Os resultados apresentados a seguir ilustram o potencial da ferramenta tanto na perspectiva conceitual quanto na prática pedagógica, com ênfase na análise das simulações geradas. Antes, porém, é necessário retomar brevemente a configuração do sistema, na qual estão definidos os parâmetros de entrada e saída empregados nas simulações.

Assumindo um caminho luminoso entre os pontos P e Q como na Figura 2, e definindo o intervalo de caminhos possíveis entre as abscissas destes pontos, ou seja, o feixe cruzando a interface entre os meios em x_i que pode tomar valores entre $P_x = -1$ e $Q_x = 1$, divide-se o segmento $\overline{P_x Q_x}$ em n pedaços iguais. Se a largura da discretização for suficientemente pequena, ou seja, se n for bem grande, o caminho de menor tempo tenderá a ser aquele que satisfaz à Lei de Snel-Descartes. Assim, o número de divisões n do segmento $\overline{P_x Q_x}$ é um parâmetro de entrada, denominado **numero** no algoritmo. O parâmetro de saída será o valor de x_i que apresente o menor tempo entre P e Q , ou seja, se $x_i = x_0$ o tempo entre P e Q será o menor entre todos os caminhos. Este valor é denominado **x0** no algoritmo e tenderá a um valor que satisfaça a minimização da função $t(x_i)$. Por este motivo, o algoritmo foi desenvolvido para fornecer as razões das Equações (5) e (11), além de **x0**.

A primeira ação recomendada ao executar o código disponibilizado no Anexo C é validar sua confiabilidade. Para isto, adotou-se uma configuração na qual os meios 1 e 2 são equivalentes, ambos representando o ar – com índices de refração **n1=1** e **n2=1**. Nesta situação, espera-se que os ângulos de incidência e refração, θ_1 e θ_2 , sejam iguais, de modo que o raio luminoso atravessasse a origem do sistema de coordenadas.

O *script* foi executado com esse cenário, utilizando o parâmetro **numero** = 20, e os resultados obtidos estão organizados na Tabela 1. A Figura 3, gerada pela saída do código no *Octave*, ilustra as trajetórias do raio de luz, destacando em preto a trajetória central correspondente a $x_0 = 0$, como previsto. Já a Figura 4 apresenta os tempos de percurso em função da posição da abscissa x_i , evidenciando um mínimo claro na curva, precisamente em $x_i = 0$.

Além disso, a Tabela 1 fornece os valores dos senos dos ângulos θ_1 e θ_2 , calculados com base na posição x_0 , e a razão entre eles, que é comparada à razão teórica n_2/n_1 . Os resultados obtidos confirmam a consistência do algoritmo desenvolvido, validando sua implementação em situações que seguem a Lei de Snell-Descartes.

Após a validação inicial do algoritmo, passa-se à verificação de seu desempenho em situações comumente estudadas. Para isso, foram selecionados três pares de meios distintos: ar/água, ar/vidro e diamante/ar. Em cada um desses casos, o parâmetro **numero** foi ajustado com valores específicos, a fim de examinar

Tabela 1: Primeiro conjunto de parâmetros de entrada e resultados.

Parâmetros de entrada	Valor	Parâmetros de saída	Valor
numero	20	x_0	0.0
n_1	1.00	$\text{sen}(\theta_1)$	0.7071
n_2	1.00	$\text{sen}(\theta_2)$	0.7071
n_2/n_1 (esperado)	1.00	$\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$	1.00

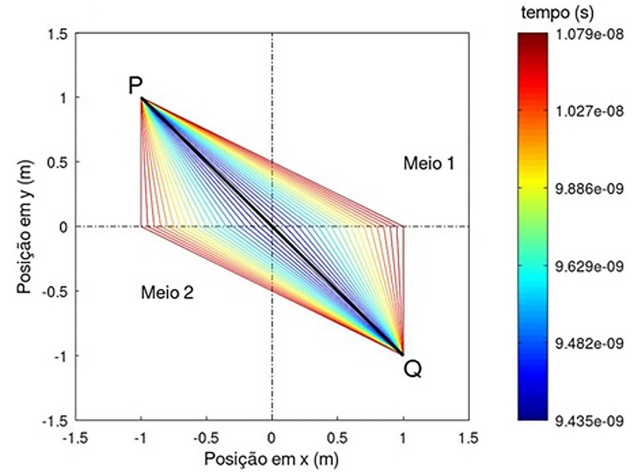


Figura 3: Imagem gerada pelo Octave das trajetórias do feixe luminoso com os meios 1 e 2 iguais, e usando o parâmetro **numero=20**.

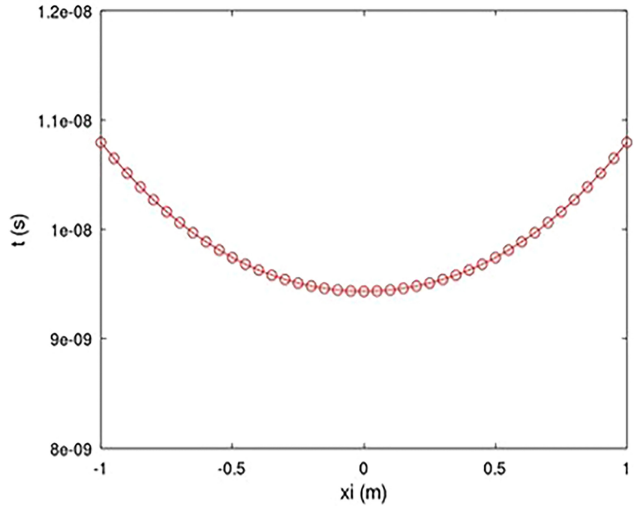


Figura 4: Comportamento dos tempos de percurso do raio de luz em função da abscissa x_i para meios iguais, **numero=20**. Imagem gerada pela saída do código no Octave.

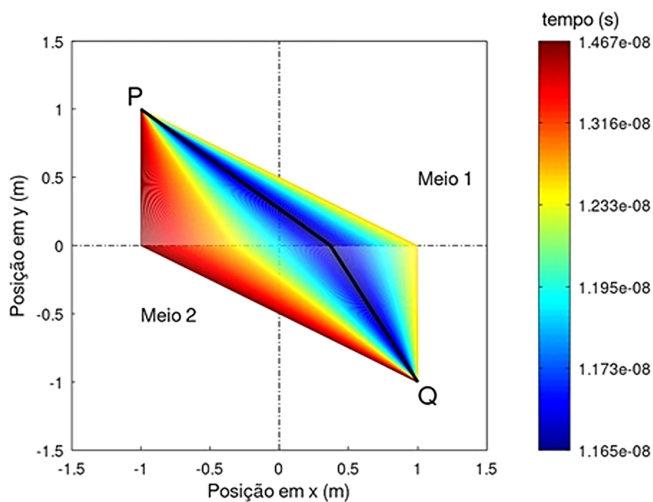
as diferenças observadas entre os resultados obtidos pela abordagem de Fermat e aqueles previstos pela Lei de Snell-Descartes. Os dados correspondentes estão organizados na Tabela 2.

No caso em que os meios 1 e 2 correspondem ao ar e água, respectivamente, o parâmetro **numero** foi fixado em 20. Com essa configuração, observa-se que a razão entre os senos dos ângulos de incidência e refração, $\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$, apresenta grande proximidade com a razão teórica n_2/n_1 , evidenciando uma diferença de aproximadamente 2.4%.

Já para o caso em que os meios 1 e 2 correspondem ao ar e ao vidro (Figura 5), respectivamente, o parâmetro **numero** foi ajustado para 100. Sob essa configuração, as razões $\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$ e n_2/n_1 apresentam uma

Tabela 2: Segundo conjunto de parâmetros de entrada e resultado.

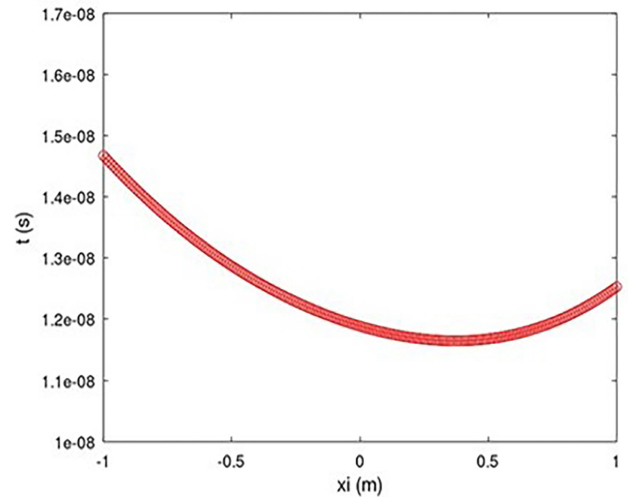
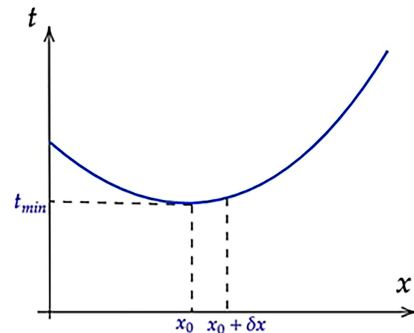
Parâmetro de entrada	Valor	Parâmetro de saída	Valor
numero	20	x_0	0.25
n_1 (ar)	1.00	$\text{sen}(\theta_1)$	0.7809
n_2 (água)	1.333	$\text{sen}(\theta_2)$	0.6000
n_2/n_1	1.333	$\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$	1.30145
numero	100	x_0	0.37
n_1 (ar)	1	$\text{sen}(\theta_1)$	0.8077
n_2 (vidro)	1.52	$\text{sen}(\theta_2)$	0.5330
n_2/n_1	1.52	$\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$	1.51531
numero	1000	x_0	-0.622
n_1 (diamante)	2.42	$\text{sen}(\theta_1)$	0.3519
n_2 (ar)	1.00	$\text{sen}(\theta_2)$	0.8515
n_2/n_1	0.413223	$\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$	0.413315

**Figura 5:** Imagem das trajetórias do feixe luminoso com os meios 1 (ar) e 2 (vidro), usando o parâmetro numero=100, gerada pela saída do código executado no Octave.

concordância ainda maior em relação ao exemplo anterior (ar/água), com uma diferença aproximada de 0,3%. Essa diferença, cerca de uma ordem de grandeza menor, está diretamente relacionada ao aumento no valor de numero, já que um maior número de divisões permite uma verificação mais precisa da solução.

Por fim, foram adotados como meios 1 e 2 o diamante e o ar, respectivamente. Para essa configuração, o parâmetro numero foi definido como 1000, visando uma maior resolução na simulação. Os resultados obtidos indicam que as razões $\text{sen}(\theta_1)/\text{sen}(\theta_2)$ e n_2/n_1 mantém elevada concordância, com uma diferença ligeiramente superior a 0,02% – duas ordens de grandeza inferior àquela verificada no caso ar/água.

Cabe destacar, neste contexto, a alteração significativa na direção de propagação da luz. Como o raio incide do meio mais refringente para o menos refringente, observa-se um afastamento da normal na refração. Além disso,

**Figura 6:** Comportamento de $t(x_i)$ quando o meio 1 é ar e o meio 2 é vidro. Figura gerada pela saída do código executado em Octave usando o parâmetro numero=100.**Figura 7:** Comportamento geral de $t(x)$ em torno de $t_{\min}$.

há a possibilidade de ocorrência de reflexão total em ângulos limite – fenômeno de grande relevância em aplicações tecnológicas, como o transporte de dados em fibras ópticas.

As Figura 6 e Figura 7 correspondem à simulação realizada com os meios ar (meio 1) e vidro (meio 2), utilizando o parâmetro numero=100. Ao compará-las com as Figura 4 e Figura 5, observa-se claramente um número maior de pontos xi considerados, reflexo direto do aumento no valor de numero. Esse refinamento na discretização resultou em uma elevação na precisão dos resultados obtidos, o que se traduz na redução da diferença observada entre os valores gerados pelo Princípio de Fermat e aqueles previstos pela Lei de Snell-Descartes.

Para concluir esta análise, vamos observar com atenção o comportamento das curvas $t(x)$ representadas nas Figura 6 e Figura 7. É possível notar que essas curvas apresentam um valor mínimo natural, correspondente à posição x_0 , que está diretamente associada ao tempo mínimo de percurso $t_{\min}$.

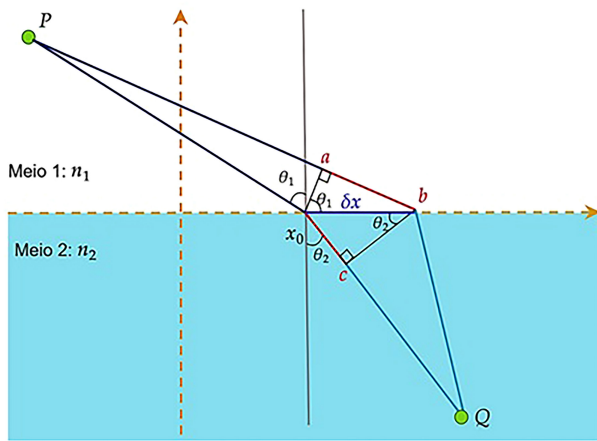


Figura 8: Diferenças de caminho provocadas por variações δx a partir da posição x_0 .

Nas proximidades desse ponto de mínimo, pequenas variações $x_0 + \delta x$ provocam alterações pouco significativas no valor de $t(x)$, evidenciando a estabilidade temporal em torno de x_0 . Essa propriedade é confirmada na Figura 8, que ilustra as implicações dessas variações δx na trajetória da luz. A partir dessa análise, é possível recuperar – de forma conceitual e numérica – a Lei de Snell-Descartes, reforçando a compatibilidade entre o Princípio de Fermat e os fundamentos da óptica geométrica.

A Figura 8 permite uma análise detalhada da diferença entre os caminhos $\overline{Px_0Q}$ e $\overline{PbQ}$, a partir de sua decomposição geométrica. É possível notar que os segmentos $\overline{Px_0}$ e $\overline{Pa}$ possuem o mesmo comprimento, da mesma forma que $\overline{cQ}$ e $\overline{bQ}$. Desta forma, podemos compreender que o deslocamento da trajetória a partir do ponto x_0 para o ponto b , ou seja, o deslocamento δx mostrado anteriormente, faz a luz percorrer um caminho maior no meio 1 do que no meio 2, pois o segmento $\overline{ab}$ é maior que $\overline{x_0c}$. Em termos de diferença de tempo, assumimos que a luz percorre o segmento $\overline{ab}$ e $\overline{x_0c}$ em tempos δt_1 e δt_2 , respectivamente. Logo, é possível calcular estes tempos a partir do valor da velocidade da luz nestes meios, $\delta t_1 = \overline{ab}/v_1$ e $\delta t_2 = \overline{x_0c}/v_2$.

Utilizando relações geométricas, relacionamos os segmentos $\overline{ab}$, $\overline{x_0c}$ e δx com os ângulos de incidência e refração, $\overline{ab} = \delta x \sin \theta_1$ e $\overline{x_0c} = \delta x \sin \theta_2$. Assim, os intervalos de tempo considerados anteriormente podem ser reescritos como $\delta t_1 = \delta x \sin \theta_1 / v_1$ e $\delta t_2 = \delta x \sin \theta_2 / v_2$. Portanto, usando o fato de que uma pequena mudança em x_0 não provoca mudança substancial em $t_{\min}$, podemos assumir que $\delta t_1 \cong \delta t_2$. Desta forma, conhecendo a relação entre os índices de refração de cada meio e a velocidade da luz, esta consideração nos leva à Equação (10), que é a Lei de Snell-Descartes.

$$\begin{aligned} (\delta x \sin \theta_1 / v_1) &= (\delta x \sin \theta_2 / v_2) \\ n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Vale ressaltar que nesta abordagem consideramos deslocamentos pequenos que levam a diferenças pequenas em torno de $t_{\min}$, permitindo uma série de aproximações.

Com isso, encerramos a análise exploratória utilizando o algoritmo como fonte de dados e informação na investigação do Princípio de Fermat e da Lei de Snell-Descartes. Os resultados apresentados evidenciam não apenas a consistência da abordagem computacional proposta, mas também seu potencial como recurso didático para o aprofundamento conceitual em óptica geométrica. Ao permitir a visualização das trajetórias luminosas, a manipulação de parâmetros e a análise quantitativa dos tempos de percurso, o algoritmo favorece uma compreensão mais intuitiva e fundamentada dos fenômenos envolvidos. Essa experiência reafirma o valor da integração entre métodos computacionais e ensino de física, promovendo uma aprendizagem ativa e conectada à realidade científica contemporânea.

5. Conclusões

O estudo da Lei de Snell-Descartes e sobre o Princípio de Fermat, aliado ao uso de ferramentas computacionais, oferece uma oportunidade para aproximar práticas investigativas e exploratórias de conceitos fundamentais de ótica geométrica de maneira interativa.

O algoritmo proposto permite não apenas visualizar as trajetórias da luz e comparar os resultados com a Lei de Snell-Descartes, mas também se mostrou potencial recurso no desenvolvimento de competências transversais, como pensamento computacional, análise gráfica e modelagem matemática.

O uso do software livre Octave [19] como ambiente de execução garante acessibilidade e adaptabilidade à proposta, uma vez que é gratuito, de fácil utilização e não exige alto desempenho computacional. Essas características tornam sua aplicação viável em diferentes contextos educacionais, incluindo instituições com recursos limitados.

Por fim, a proposta busca integrar tecnologias ao ensino, explorando metodologias alternativas sem renunciar às abordagens consolidadas, com vistas à criação de atividades centradas em habilidades contemporâneas, como a geração e análise de dados, interpretação de modelos computacionais e raciocínio lógico aplicado à resolução de problemas.

Material Suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online: Anexo A – Sequência Didática: Uma Abordagem Computacional do Princípio de Fermat.

Anexo B – Algoritmo de Refração: O Problema De Minimização Do Tempo.

Anexo C – Código completo em Octave.

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no artigo e na seção “Material Suplementar”.

Referências

- [1] J.L.C. Nunes e B.G. Coutinho, em: *IX Congresso Nacional de Educação* (João Pessoa, 2023).
- [2] R.S. Melo e A.B.G.P. Carvalho, *Revista Novas Tecnologias na Educação* **11** (2013).
- [3] L. Krauss, *A física da luz e o mundo da informação* (Free Press, Nova York, 2009).
- [4] J.A. Montenegro e D.C.G.A. Rodrigues, em: *XII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (Natal, 2019).
- [5] J.W. Eaton, *GNU Octave Manual: Version 5* (CreateSpace, 2019).
- [6] M.P. Martinho e V. Soares, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **39**, e3603 (2017).
- [7] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Bookman, São Paulo, 2008), v. 1.
- [8] M. Zghal, H. Bouali, Z. Ben Lakhdar e H. Hamam, em: *Education and Training in Optics and Photonics. OSA Technical Digest Series* (Optica Publishing Group, 2007).
- [9] R. Rashed, *Isis* **81**, 464 (1990).
- [10] M.P.C. Martinho, *O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2013).
- [11] E. Hecht, *Óptica* (Bookman, Porto Alegre, 2016), 5 ed.
- [12] R. Descartes, *Discours de la Méthode* (Jan Maire, Leiden, 1637).
- [13] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7 ed.
- [14] F.J. Dijksterhuis, *Lenses and Waves: Christiaan Huygens and the Mathematical Science of Optics in the Seventeenth Century* (Springer, Dordrecht, 2004).
- [15] F. Cajori, *A history of physics in its elementary branches, including the evolution of physical laboratories* (The Macmillan Company, New York, 1899).
- [16] D. Glick, *Synthese*, **202** (2023).
- [17] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, 4: ótica, relatividade, física quântica* (Blucher, São Paulo, 2014).
- [18] M.A. Moreira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20200451 (2021).
- [19] GNU Octave, *GNU Octave: Scientific Programming Language* (GNU Octave, 2020), disponível em: <https://octave.org/>.