



Simulações computacionais para o ensino de cinemática

Computer simulations for teaching kinematics

V. Stein¹, A. Gurjão¹, Tiago D. Admiral², I. Guilhon^{*1}

¹Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Laboratório de Pesquisa em Educação Científica e Tecnológica, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil.

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Campos dos Goytacazes, RJ, Brasil.

Recebido em 25 de agosto de 2025. Revisado em 22 de outubro de 2025. Aceito em 30 de outubro de 2025.

Este artigo apresenta o desenvolvimento e a aplicação de simulações computacionais interativas para o ensino de conceitos fundamentais de cinemática no nível de ensino básico e superior. As simulações foram projetadas em ambiente web, com interface responsiva e implementação em JavaScript, permitindo acesso amplo e sem necessidade de infraestrutura especializada. Duas simulações são apresentadas: (i) comparação entre movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variados e (ii) simulador balístico de projéteis esféricos e sem rotação sujeitos a lançamentos oblíquos em meios com ou sem resistência. A resistência do meio é modelada pela lei de Stokes. As simulações possuem alto nível de interatividade, permitindo controle direto de variáveis, coleta de dados e extração de parâmetros. Cada uma inclui um modo de desafios com potencial de promover aprendizagem ativa, análise de dados e comparação com diferentes abordagens teóricas. A proposta alia recursos de gamificação a um paradigma de ensino de física experimental, constituindo uma alternativa viável para ensino presencial e remoto, com múltiplas possibilidades de aplicação didática.

Palavras-chave: Simulações Computacionais, Mecânica, Javascript, Física Experimental.

This article presents the development and application of interactive computer simulations for teaching fundamental kinematics concepts at elementary and advanced levels. The simulations were designed in a web environment, with a responsive interface and implementation in JavaScript, allowing broad access without the need for specialized infrastructure. Two simulations are presented: (i) a comparison between uniform and uniformly varied rectilinear motions and (ii) a ballistic simulator of spherical and irrotational projectiles subjected to oblique launches in resistive and unresisted media. The resistance of the medium is modeled according to Stokes' law. Each simulation includes a challenge mode for determining hidden parameters, promoting active learning, data analysis, and comparison of different theoretical approaches. The proposal combines gamification resources with an experimental physics teaching paradigm, constituting a viable alternative for in-person and remote physics teaching.

Keywords: Computational Simulations, Mechanics, Javascript, Experimental Physics.

1. Introdução

O ensino de física apresenta desafios muito específicos, particularmente na conciliação entre a teoria e a prática experimental. Com o avanço das tecnologias digitais, as simulações computacionais têm se tornado uma ferramenta pedagógica valiosa, oferecendo aos estudantes a oportunidade de explorar conceitos físicos por meio de experimentos virtuais. Essas simulações não apenas complementam as aulas teóricas, mas também oferecem um ambiente controlado e seguro para investigar fenômenos que, muitas vezes, são difíceis de reproduzir em laboratório devido a limitações de tempo, espaço ou recursos [1].

No entanto, nem todas as simulações são igualmente eficazes no contexto educacional, a interatividade

desempenha um papel central na eficácia desses recursos como estabelecido por estudos anteriores [2, 3]. Inspirados em discussões anteriores sobre interatividade em simulações (Yamamoto e Barbeto, 2004), propomos aqui uma tipologia própria que categoriza as simulações em três níveis, com base no grau de interatividade e possibilidade de extração de dados para análise.

Nesse contexto, nosso trabalho também complementa a contribuição recente de Jaime e Leonel (2024) [3], que realizaram uma revisão abrangente sobre publicações nacionais envolvendo simulações computacionais no ensino de Física. Os autores destacam as potencialidades e os desafios desse recurso didático, ressaltando especialmente o papel da interatividade no engajamento e na aprendizagem dos estudantes. Enquanto o estudo dos autores fornece um panorama geral da área, nossa proposta avança ao apresentar uma classificação prática dos níveis de interatividade e ao desenvolver simulações específicas de cinemática alinhadas a esse enquadramento.

*Endereço de correspondência: guilhon@ita.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

No primeiro nível, há simulações com pouca ou nenhuma interatividade, que funcionam como simples animações para observação de fenômenos ou eventos experimentais. Embora úteis como recurso visual, essas simulações oferecem pouca oportunidade de exploração ativa por parte do estudante. Como exemplo de uma simulação de primeiro nível podemos citar, por exemplo, a simulação de combinação de cores RGB (*Red Green Blue*) do site PhET (*Physics Education Technology*) Colorado (“Visão colorida”). Neste caso a simulação produz um resultado final qualitativo, sem que o usuário consiga interagir de maneira diversa além da visualização.

O segundo nível permite um maior grau de interação, como o ajuste de variáveis iniciais, e sua mudança ao longo do experimento, mas carece de ferramentas para que o usuário extraia os valores dos parâmetros ao longo do experimento ou realize medições diretas. O exemplo do simulador (“Difusor”) mostra a evolução de alguns parâmetros durante a difusão entre dois gases, porém não fornece meios para extrair os valores destes parâmetros em tempos específicos.

O terceiro nível, foco deste trabalho, compreende simulações que oferecem um alto grau de interatividade, permitindo que o usuário ajuste variáveis iniciais e acompanhe a evolução de parâmetros durante o experimento, possibilitando a extração de valores para análise. Esse tipo de simulação não apenas se aproxima mais de uma prática experimental real, mas também é especialmente valioso no contexto do ensino remoto, ao fornecer uma experiência mais completa e próxima da realidade.

Neste artigo, apresentamos três simulações interativas, de terceiro nível, criadas especificamente para o ensino de mecânica. Exploramos como essas ferramentas podem ser aplicadas para enriquecer o aprendizado, permitindo que os estudantes realizem experimentos virtuais que combinam rigor científico e flexibilidade pedagógica, atendendo às demandas de ensino em cenários presenciais e remotos. Além das características gerais mencionadas, as simulações também contam com possibilidade de “desafio”, que confere às mesmas uma possibilidade de integrar a perspectiva da gamificação, que possui potencial para gerar maior motivação e interesse na atividade [4].

2. Metodologia das Simulações Computacionais

2.1. Paradigma das simulações propostas

O grande desafio das simulações computacionais, enquanto uma TDIC [5], é preservar a essência da experimentação e o contato direto com o fenômeno físico. Para isso, o nosso objetivo é desenvolver um software que mostre não somente o fenômeno físico, como em outras simulações, mas também seja intrinsecamente interativo e com a possibilidade de que medidas possam ser extraídas pelo usuário. A opção de escolher parâmetros iniciais para a realização da simulação replica

a prática de um professor que monta um experimento para seus estudantes, porém com um controle maior sobre os próprios parâmetros, tanto em exatidão quanto em acessibilidade. Uma característica fundamental das simulações apresentadas é a inclusão de uma grade com escala de comprimento, que permite os usuários a estabelecerem um sistema de referência próprio para realizar suas medições.

Outro ponto importante para o objetivo pedagógico da simulação é seu modo desafio, ou gamificação que, de acordo com [6], oferece uma nova camada de interatividade e propósito ao usuário em meio a simulação. O objetivo consiste em, a partir dos ajustes dos parâmetros iniciais e da análise dos dados observados realizar uma determinada tarefa, ou, com base em medidas físicas extraídas da simulação, determinar um parâmetro oculto. Ao promover um engajamento ativo, essa abordagem faz com que o usuário se sinta recompensado por resolver o desafio e, consequentemente, aplicar de maneira prática conceitos de experimentação.

Esse paradigma é inspirado em simulações computacionais aplicadas por diferentes olimpíadas científicas de física ao redor do mundo. Essas simulações foram utilizadas no contexto de pandemia do covid-19 [7] como uma alternativa a provas experimentais presenciais. Como exemplos de competições que utilizaram essas estratégias, citamos a Olimpíada Brasileira de Física [8], Olimpíada Iberoamericana de Física [9] e Olimpíada Internacional de Física [10]. Essa estratégia permite com que os estudantes participantes pudessem ter contato com uma experiência próxima à realização de um experimento com fenômenos sofisticados, coletassem medidas e realizassem a determinação de parâmetros desconhecidos da simulação com base em medidas físicas e tratamento dos dados coletados.

2.2. Tecnologias adotadas

As simulações foram desenvolvidas em utilizando uma página HTML (*HyperText Markup Language*) estática [11] com interatividade e dinâmica do sistema físico implementada em *JavaScript* [12]. Essa solução tecnológica foi escolhida por permitir a execução da simulação em qualquer dispositivo tecnológico com um navegador de *internet*, tais quais *tablets*, *smartphones* e computadores pessoais. Não há necessidade, portanto, de nenhuma infraestrutura mais sofisticada do que dispositivos eletrônicos, institucionais ou pessoais, com acesso a *internet*.

A página HTML é basicamente composta por uma janela de visualização do fenômeno (*canvas*) acompanhada de elementos interativos como caixas de texto, botões, barras deslizantes (*sliders*) e caixas de seleção. O estilo de formatação da página é definido por meio de *CSS* (*Cascading Style Sheets*) [11] para configurar a apresentação visual. Utilizamos o *Bootstrap*, um *framework front-end* de código aberto que fornece uma coleção de componentes pré-estilizados em HTML, *CSS*

e *JavaScript* que seguem princípios de *design* responsivo, isto é, que se adaptam segundo o dispositivo utilizado pelo usuário [13].

A lógica por trás das simulações, os cálculos físicos necessários e interface gráfica dinâmica são todos implementados em *JavaScript* [12], proporcionando uma interação dinâmica e responsiva. De maneira geral, as simulações têm um conjunto de três funções a serem implementadas. O primeiro conjunto consiste em funções de aquisição dos valores dos parâmetros de simulação, acionadas quando ocorre um evento de alteração de valores através de manipulação dos *sliders* ou entradas manuais por meio de caixas de texto. O segundo grupo corresponde a um conjunto de funções que tratam da execução da simulação com um determinado conjunto de parâmetros e sua exibição na interface gráfico.

Por fim, existem funções dedicadas à configuração de um modo desafio do simulador, no qual o usuário deve determinar algum parâmetro desconhecido da simulação. Para garantir a reprodutibilidade dos experimentos virtuais, especialmente em cenários com grandes grupos de estudantes, foi implementada a possibilidade de selecionar o número semente (*seed*), exibida como número do desafio, para a geração de números aleatórios. Isso assegura que todos os usuários possam trabalhar com as mesmas condições iniciais, facilitando comparações e discussões coletivas.

3. Simulador de Movimentos Uniforme e Uniformemente Variado

3.1. Implementação da simulação

A primeira simulação a ser discutida está disponível na Ref. [14] e aborda conceitos fundamentais da cinemática, como velocidade, aceleração e funções horárias. A simulação apresenta dois objetos móveis, uma esfera cinza, que realiza um movimento retilíneo uniforme (MRU) e uma esfera azul, que realiza um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). A Figura 1 ilustra o ambiente gráfico da simulação.

Os estudantes exploram o comportamento de objetos em movimento linear, analisando suas posições, velocidades e acelerações ao longo do tempo. A simulação permite a manipulação dos seguintes parâmetros: (i) velocidade da esfera cinza, v_u (0 a 50 m/s); (ii) velocidade inicial da esfera azul, v_0 (0 a 50 m/s); e (iii) aceleração da esfera azul, a (-5 a 20 m/s²). Para auxílio a tomada de medidas, o usuário pode ativar ou desativar funcionalidades como a exibição de grades e linhas de centro, a fim de permitir a tomada de medidas quando os mostradores de posição são desligados durante o modo desafio. A distância entre duas grades seguidas é conhecida e igual a 20 m.

No modo desafio, os valores iniciais de velocidade e aceleração das esferas são desconhecidos pelo usuário e determinados aleatoriamente dentro de intervalos predefinidos: v_1 entre 15 e 40 m/s; v_0 entre 5 e 25 m/s; e a entre 1 e 10 m/s². Esses intervalos são mais estritos a fim de evitar tempos de movimentos excessivamente longos ou possíveis movimentos retrógrados no caso de acelerações negativa.

O cálculo das posições das esferas segue o modelo computacional baseado em iterações temporais discretas, utilizando $\Delta t = 0,07$ s como intervalo. As equações utilizadas para atualizar a posição (x) a cada passado é dada por

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2, \quad (1)$$

e, por sua vez, a velocidade (v) é dada por

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a\Delta t. \quad (2)$$

No caso de movimentos uniforme e uniformemente variados, essas expressões são exatas. E para movimentos com variação de velocidade não uniformes, ainda sim poderiam ser utilizadas de forma aproximada para passos de tempo pequenos como o adotado na simulação. Essas atualizações são realizadas em tempo real, e os resultados são representados graficamente no *canvas*, utilizando coordenadas calculadas em metros por pixel.



Figura 1: Ambiente de simulação para o estudo de MRU e MRUV. A interface apresenta uma pista de corrida com opções de controle para ajustar velocidades e acelerações, além de desafios interativos.

3.2. Modo de desafio de MRU e MRUV

O modo desafio é um recurso em que certos parâmetros (como velocidades iniciais ou acelerações) não são mostrados ao estudante, ficando ocultos de propósito. A tarefa consiste em descobri-los a partir de medições realizadas na própria simulação, como posição em função do tempo ou velocidade média, usando conceitos de análise experimental e tratamento de dados. Dessa forma, o estudante deixa de apenas “observar” o fenômeno e passa a atuar como investigador, aplicando técnicas da Física para resolver o enigma proposto. Esse mecanismo aproxima a experiência virtual de um experimento real e acrescenta elementos de gamificação, que podem aumentar a motivação e o engajamento [6].

Os estudantes são desafiados a determinar, através de medidas físicas realizadas através da interface gráfica, os parâmetros iniciais ocultos dessa simulação: velocidade do móvel em MRU, e velocidade inicial e aceleração do móvel em MRUV. Em posse do desafio 1 da simulação, como exemplo, podemos propor duas maneiras de resolvê-lo.

O método dos mínimos quadrados constitui uma abordagem robusta para a resolução deste problema. O procedimento consiste no registro sistemático das posições das esferas em diferentes instantes de tempo ao longo da simulação. O objetivo é determinar uma função que descreva a posição em função do tempo, de modo a ajustar-se aos valores numéricos obtidos na simulação e permitir sua comparação com a expressão teórica correspondente. Com base nesses dados e utilizando as escalas de referência, foi elaborada a Tabela 1, contendo as posições medidas de cada esfera em função do tempo.

A esfera cinza apresenta movimento retilíneo uniforme (MRU) e a esfera azul, movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Para a esfera cinza, a função

posição em função do tempo é expressa por $s = s_0 + v_0 t$, em que s_0 representa a posição inicial ($s_0 = -0,38$ m). Trata-se de uma função linear, cujo coeficiente angular (v_0) foi determinado por regressão linear utilizando ferramenta apropriada de análise de dados.

A partir do ajuste linear dos valores de posição em função do tempo, obteve-se $A = 32,77$ m/s e coeficiente de correlação $r = 0,999$. A incerteza associada ao coeficiente angular foi calculada como $\sigma_A = 0,07$. Assim, a velocidade inicial estimada para a esfera cinza é $v_{0c} = (32,77 \pm 0,07)$ m/s.

Prosseguindo com a análise do corpo 2, verifica-se que a função que descreve sua posição em função do tempo é quadrática, dada por $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, em que s_0 representa a posição inicial no instante $t = 0$, sendo neste caso $s_0 = -0,38$ m. Por tratar-se de uma função de segundo grau, é possível reescrevê-la em uma forma linear, permitindo a aplicação da regressão linear para a determinação dos parâmetros desconhecidos. Dessa forma, a expressão original pode ser reformulada para uma nova função adequada à utilização do método dos mínimos quadrados:

$$\bar{v}([0, t]) = \frac{s - s_0}{t} = v_0 + \frac{1}{2} a t, \quad (3)$$

em que v_0 é coeficiente linear e $\frac{1}{2} a$ é coeficiente angular. A Tabela 2 apresenta os resultados tabulados considerando essa nova variável de interesse.

Ao realizar o ajuste linear dos valores de $\bar{v}(t)$, por meio de regressão linear, obteve-se o coeficiente angular $a = 3,75$ m/s², coeficiente linear $b = 19,82$ m/s e o coeficiente de correlação $r = 0,999$. A incerteza associada ao coeficiente angular foi calculada como $\sigma_A = 0,06$, enquanto a incerteza do coeficiente linear foi $\sigma_B = 0,35$. Dessa forma, a partir dos resultados da regressão, a velocidade inicial estimada é $v_{0a} = (19,8 \pm 0,3)$ m/s e a aceleração é $a_a = (7,50 \pm 0,12)$ m/s².

Tabela 1: Comparação de Tempo, em segundos, e a posição para as esferas cinza e azul, em metros.

Tempo (s)	Posição (m)	
	Esfera Cinza	Esfera Azul
0,00	-0,38	-0,38
1,75	56,83	49,51
2,17	70,49	61,46
2,38	77,32	70,19
3,22	105,85	105,12
3,85	129,16	134,39
4,13	135,85	148,20
4,41	144,55	162,78
5,32	174,18	215,00
5,88	192,59	249,58
6,79	223,15	312,44
7,35	240,98	353,17
7,77	254,64	385,71
8,26	270,73	425,37
8,47	277,10	442,53

Tabela 2: Tabela de valores de $\bar{v}$ para diferentes instantes de tempos.

Tempo (s)	$\bar{v}$ (m/s)
0,00	—
1,75	28,51
2,17	28,50
2,38	29,65
3,22	32,76
3,85	35,00
4,13	35,98
4,41	36,99
5,32	40,49
5,88	42,51
6,79	46,07
7,35	48,10
7,77	49,63
8,26	51,54
8,47	52,23

Tabela 3: Comparação de parâmetros reais e calculados.

Parâmetro	Valor Real	Valor Calculado
Velocidade inicial cinza (m/s)	32,54	$32,54 \pm 0,04$
Velocidade inicial azul (m/s)	19,69	$19,82 \pm 0,35$
Aceleração azul (m/s ²)	7,48	$7,50 \pm 0,12$

Finalmente, para validar nosso resultado, podemos verificar a nossa solução com a esperada do desafio, que é fornecida pela simulação. A Tabela 3 apresenta os valores do desafio considerado comparados com aqueles obtidos durante um de nossos ensaios. O objetivo é verificar se os valores encontrados, considerando suas incertezas, são consistentes com os parâmetros ocultos do desafio. Isso reforça a compreensão da incerteza experimental e dos métodos de análise de dados.

Verifica-se que os valores obtidos para os parâmetros desconhecidos encontram-se integralmente dentro do intervalo estipulado na solução. Fortuitamente, o valor da velocidade para o corpo cinza coincide exatamente com o valor real para o ensaio realizado. Tal resultado reforça a robustez da aplicação do método dos mínimos quadrados que, quando corretamente executado, possibilita a obtenção de valores confiáveis e coerentes com os fundamentos teóricos.

A simulação utilizada neste estudo apresenta um elevado grau de interatividade, permitindo o ajuste de variáveis iniciais, o acompanhamento em tempo real da evolução dos parâmetros e a extração direta de dados para análise quantitativa. Essas características a enquadram no *nível 3* de nossa tipologia de classificação, conferindo-lhe um valor pedagógico adicional por aproximar-se de uma prática experimental real.

Uma abordagem alternativa para a resolução do desafio seria determinar os parâmetros desconhecidos utilizando o menor número possível de medições, dando foco à eficiência e otimização de tempo. Aplicando a simulação em turmas de ensino fundamental e médio, percebemos que essa foi a estratégia preferida pelos estudantes.

Embora possa ser mais suscetível a erros se as medições não forem suficientemente acuradas, ela incentiva os estudantes a pensar criticamente sobre a seleção dos pontos de dados mais representativos e a importância da precisão em um contexto de recursos limitados.

Quanto maior a distância entre os pontos tomados, mais preciso será o método. Em posse disso, como temos somente uma variável para a função horária da esfera cinza, só utilizaremos um ponto - o último. Para a esfera azul, como temos duas variáveis na função horária, tomaremos dois pontos - distantes entre si em tempo e distantes em relação a origem, isto é, um no meio e outro no fim do trajeto.

Desenvolvendo para a esfera cinza, temos que:

$$s_f = s_0 + v_c t_f. \tag{4}$$

Assim, para $s_f = 277,1 \text{ m}$, $s_0 = -0,38 \text{ m}$ e $t_f = 8,47 \text{ s}$, temos $v_c = 32,76 \text{ m/s}$.

Desenvolvendo para a esfera azul, temos que:

$$s_m = s_0 + v_a t_m + \frac{1}{2} g t_m^2, \tag{5}$$

$$s_f = s_0 + v_a t_f + \frac{1}{2} g t_f^2. \tag{6}$$

Assim, para $s_f = 442,53 \text{ m}$, $s_m = 148,20 \text{ s}$, $s_0 = -0,38 \text{ m}$, $t_f = 8,47 \text{ s}$ e $t_m = 4,13 \text{ s}$, temos, resolvendo os sistemas lineares, que $v_a = 20,45 \text{ m/s}$ e $a_a = 7,52 \text{ m/s}$.

Como podemos ponderar pelos resultados do método, os valores encontrados foram coerentes com o esperado, em particular a aceleração do azul.

Portanto, a medição mínima segue como um método simples, mas ao mesmo tempo válido e de excelente caráter didático.

3.3. Outras formas de utilização da simulação

Além de um tratamento que explora determinação de parâmetros desconhecidos com uso de métodos de física experimental, a situação permite que o usuário crie situações clássicas encontradas em problemas de cinemática, como distância ou tempo de frenagem ou ultrapassagem. Pode-se ainda utilizar o simulador para construção de gráficos de funções horárias ou classificação do movimento enquanto progressivo/retrógrado ou acelerado/desacelerado conforme o passar do tempo.

Essas funcionalidades demonstram a flexibilidade pedagógica da simulação, compatível com a classificação feita anteriormente, que pode ser aplicada a diferentes níveis de ensino e contextos educacionais. Ter a visualização do problema em tempo real e o controle direto sobre o sistema oferece um entendimento muito mais profundo do fenômeno observado. Essa compreensão vai além do que um texto ou diagrama estático em um livro didático pode proporcionar, pois permite que o estudante explore ativamente as variáveis, observe as consequências de suas escolhas e desenvolva uma intuição física que é mais difícil de adquirir apenas por meio de equações.

Para consolidar o caráter investigativo do “modo desafio”, propomos que o professor convide a turma a desativar temporariamente o *tracking* automático da simulação e registrar as posições manualmente, comparando em seguida os coeficientes obtidos com e sem esse recurso. O confronto entre os dois conjuntos de resultados evidencia erros sistemáticos, por exemplo, atrasos na leitura do cronômetro ou pequenas discrepâncias na marcação do cursor. Esse procedimento abre espaço para discutir a distinção entre precisão e exatidão, a relevância de estimar incertezas e a forma como esses desvios se propagam até a velocidade média e a aceleração calculadas. Essa prática reforça a percepção de que mesmo em um ambiente virtual “ideal” persiste

a necessidade de avaliar possíveis fontes de erro e validar modelos.

Ao final da atividade, sugerimos uma breve reflexão orientada em quatro competências-chave: (i) coleta e organização de dados, (ii) aplicação de técnicas de ajuste e estimativa de incertezas, (iii) interpretação física dos parâmetros extraídos e (iv) comunicação clara dos resultados. Uma rubrica simples pode atribuir, por exemplo, maior peso à qualidade da análise e à discussão crítica dos erros do que à obtenção de valores numéricos exatos, estimulando os estudantes ao raciocínio científico em vez de apenas “acertar” coeficientes ocultos.

4. Simulação de Trajetória Balística em Lançamentos Oblíquos

4.1. Implementação do simulador balístico

A segunda simulação de ensino de cinemática está disponível na Ref. [15] e tem uma interface gráfica mostrada pela Figura 2, na qual se destaca a presença de grades para medição, essa é uma das diferenças entre este simulador e os demais, como *PhET*, citados anteriormente. Ela permite que o usuário adquira medidas diretamente da tela, sem que sejam fornecidos automaticamente os valores. Esse aspecto referencia uma prática experimental que exija realização de medidas física em uma escala analógica e diferencia a simulação proposta de outras disponíveis na internet, como as desenvolvidas por oPhysics [16–18]. Além disso, a inclusão de efeitos de viscosidade e modo desafio com parâmetros ocultos permite aplicações didática mais desafiadoras.

A interface permite a manipulação de diversos parâmetros físicos: (i) velocidade inicial do projétil, v_0 , que pode variar entre 0 e 70 m/s; (ii) ângulo de lançamento, θ , ajustável de 0 a 90° ; (iii) raio do projétil, r , com valores entre 1 e 30 cm; e (iv) viscosidade do ar, η , que pode ser definida como um valor numérico arbitrário em unidades de $10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Para facilitar a análise

visual, o usuário pode habilitar uma grade de fundo com espaçamento fixo, bem como selecionar diferentes cores para as trajetórias geradas.

A simulação de lançamento oblíquo abordada nesta seção desconsidera inicialmente a ação de forças dissipativas, como a resistência do ar, adotando as equações clássicas do movimento balístico:

$$x(t) = v_0 \cos \theta t, \quad y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2,$$

em que g é a aceleração da gravidade. Essa condição idealizada permite que a trajetória seja descrita por uma parábola e fornece um referencial didático essencial para compreensão de decomposição de movimentos em duas dimensões, além de movimentos balísticos.

Ao desenvolver as equações do movimento acima, reescrevendo o tempo de lançamento em função do posição horizontal da forma $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$, podemos desenvolver:

$$y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{gt^2}{2}, \quad (7)$$

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (8)$$

A função de y por x é a de uma cônica correspondente a uma parábola com vértice na origem do sistema de coordenadas. Ela também é um polinômio quadrático em $\tan \theta$, cujas raízes podem ser encontradas resolvendo uma equação de 2º grau em $\tan \theta$:

$$0 = \frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right),$$

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2 \frac{gx^2}{v_0^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)}}{\frac{gx^2}{v_0^2}}$$

$$\tan \theta_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2 \frac{\alpha}{x} \left(y + \frac{x}{2\alpha} \right)}. \quad (9)$$

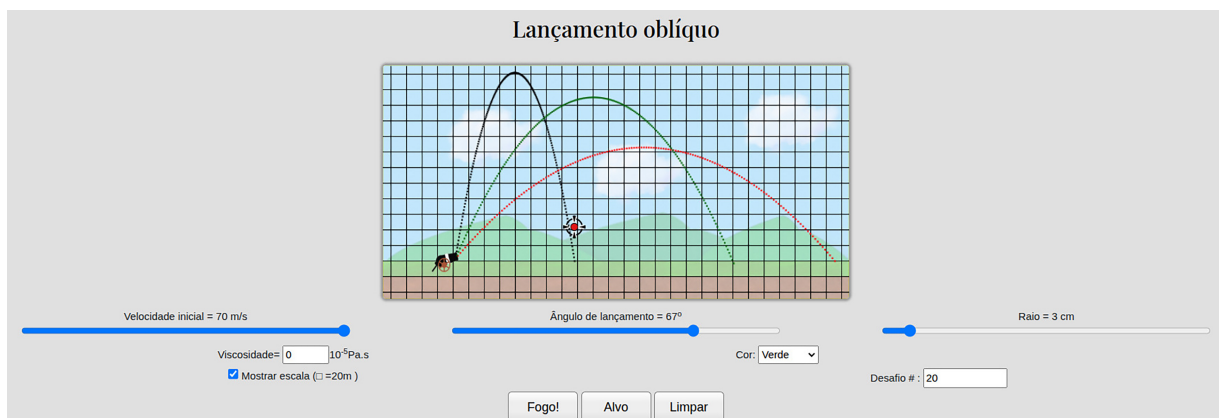


Figura 2: Ambiente de simulação para o estudo de lançamentos oblíquos. Na janela de simulação são mostradas três possíveis trajetórias obtidas por diferentes escolhas de parâmetros iniciais. A rede quadriculada é acionada na caixa seletora abaixo e à esquerda. O botão alvo serve para apresentar o alvo em uma posição aleatória.

em que $\alpha = \frac{v_0^2}{xg}$ é um parâmetro adimensional conveniente. Para determinar condições iniciais de lançamento para atingir um alvo arbitrário, sugere-se ajustar o valor de velocidade para o mais alto possível ($v_{max} = 70$ m/s) e substituir x_{alvo} e y_{alvo} na equação 9. Eventuais valores negativos do discriminante indicam que o alvo está fora do alcance do lançador dada a velocidade máxima permitida pelo simulador.

No modo desafio, os usuários devem ajustar os parâmetros iniciais para atingir um alvo localizado em uma posição específica. O alvo é exibido aleatoriamente no cenário, e o objetivo é determinar a combinação ideal de velocidade e ângulo de lançamento para atingi-lo. De forma complementar, a abordagem também pode ser focada na determinação da parábola de segurança, ou seja, na determinação da trajetória máxima que evita um obstáculo fixo. Essa seria outra possibilidade pedagógica para o uso do simulador.

Vale ressaltar que a posição do alvo é sorteada aleatoriamente e, como os parâmetros de ângulo e velocidade apresentam valores limitados, algumas opções de alvo não são possíveis de serem atingidas.

4.2. Efeito do atrito viscoso

Para uma modelagem mais realista, na qual a resistência do ar é proporcional a velocidade de um móvel esférico sem rotação, a resistência do ar é incorporada por meio da lei de *Stokes*, matematicamente expressa pela equação a seguir [19]

$$F_d = 6\pi\eta r v, \quad (10)$$

em que η é a viscosidade dinâmica do ar, r é o raio do projétil e v é sua velocidade instantânea. Essa formulação é válida para regimes de fluxo laminar e baixos números de *Reynolds*, sendo apropriada para projéteis com dimensões pequenas e velocidades moderadas.

A força de arrasto quadrática, mais adequada para velocidades elevadas e regime turbulento, foi propositalmente excluída desta simulação. Assim, os resultados obtidos são válidos apenas para casos em que a hipótese de fluxo laminar se sustenta.

A massa do projétil é dada por

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s, \quad (11)$$

em que ρ_s é a densidade do material, assumida constante. A aceleração devida ao arrasto viscoso é dada por:

$$a_d = \frac{F_d}{m} = \frac{6\pi\eta R v}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s} = \frac{9\eta}{2\rho_s R^2} v = \gamma v, \quad (12)$$

mostrando que, para um material com densidade fixa, a desaceleração devido ao atrito viscoso é inversamente proporcional ao quadrado do raio da esfera, visto que $\gamma = \frac{9\eta}{2\rho_s R^2}$. Essa dependência inversamente proporcional ao quadrado do raio é usualmente inesperada por

estudantes mais inexperientes, que focam sua atenção exclusivamente na diminuição da força de atrito viscoso, que é proporcional ao raio, sem levar em conta que a inércia do projétil varia com o cubo do raio, mantida uma massa específica constante.

Apesar da introdução da força de arrasto viscoso, o problema do lançamento oblíquo com resistência do ar proporcional à velocidade ainda admite uma solução analítica, o que o torna um excelente modelo intermediário entre o caso idealizado (sem resistência) e os regimes mais complexos. Neste caso, as equações diferenciais que descrevem o movimento do projétil tornam-se de primeira ordem linear, tanto para a componente horizontal quanto para a vertical. Admitindo que a única força além do peso seja o atrito viscoso (modelo de *Stokes*), as equações do movimento tomam a forma:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \gamma v_y. \quad (13)$$

A solução dessas equações diferenciais é conhecida e resulta em funções exponenciais para as componentes da velocidade:

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\gamma t}, \quad v_y(t) = \left(v_{0y} + \frac{g}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}, \quad (14)$$

em que $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ são as componentes iniciais da velocidade. A partir dessas expressões, é possível determinar as posições $x(t)$ e $y(t)$ por integração direta:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \frac{v_{0x}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}), \quad (15)$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(t') dt' = \left(\frac{v_{0y}}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t. \quad (16)$$

Essas soluções descrevem uma trajetória que deixa de ser uma parábola e assume uma forma assimétrica e concavidade mais fechada que a parábola observada no caso de meio não viscoso. Resultados clássicos do lançamentos oblíquos como a altura máxima, ângulo de máximo alcance, determinação de parâmetros de lançamento para atingir um determinado alvo ainda podem ser explorados, mas tornam-se mais desafiadores do que o caso do móvel livre do efeito do meio material.

4.3. Solução proposta para o modo desafio

O modo desafio da simulação de lançamento oblíquo consiste na tarefa de ajustar condições de velocidade inicial e ângulo de lançamento para atingir um alvo localizado em um ponto $P(x_a, y_a)$ em uma posição pseudoaleatória gerada a partir de um número inteiro. Uma estratégia eficiente para resolver o desafio é fixar a velocidade inicial no valor máximo permitido, de modo o lugar geométrico dos pontos atingíveis, popularmente conhecido como parábola de segurança. Em seguida, deve-se resolver a equação do movimento para determinar

o ângulo de lançamento adequado para determinar um ângulo de lançamento conveniente.

Considerando as coordenadas x_a e y_a do alvo, pode-se manipular as equações do movimento para obter uma equação em $\tan \theta$, cuja solução oferece duas possibilidades de ângulo para atingir o alvo: uma mais inclinada, ângulo alto, e outra mais rasante, ângulo baixo. É recomendada a escolha do menor ângulo, pois tende a apresentar menor propagação de erros. Para um projétil disparado com velocidade inicial v_o em um campo gravitacional uniforme, $R(\theta) = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta$, a dispersão esperada no ponto de impacto é proporcional à derivada parcial

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{2v_o^2}{g} \cos 2\theta. \quad (17)$$

Quando escolhemos o ângulo rasante, o fator $|\cos 2\theta|$ decresce lentamente com θ , já para o ângulo mais alto, este fator tem mesma magnitude, porém a trajetória mais íngreme amplifica os erros verticais. Para o mesmo $\Delta\theta$, o desvio vertical ao passar pela posição horizontal do alvo é maior, pois

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \propto \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (18)$$

Para demonstrar a validade do método, resolveremos um dos possíveis desafios do simulador de lançamento, neste caso o desafio 16. O primeiro passo é calcularmos a posição horizontal e vertical do centro do alvo através da escala fornecida pela simulação, para, então, utilizarmos a equação (7) afim de encontrarmos os θ 's.

No desafio 16, os valores encontrados para o centro do alvo foram $x_a = 306\text{ m}$ e $y_a = 62\text{ m}$. Ao substituir esses valores na equação 9, são encontrados um ângulo de lançamento baixo de $\theta_- = 32^\circ$ e um ângulo de lançamento alto de $\theta_+ = 69^\circ$. Ambas as condições iniciais de lançamento em meio material sem viscosidade são bem sucedidas, conforme mostrado pelas curvas pretas da Figura 3.

Continuando no desafio 16, ainda podemos resolvê-lo com a presença da viscosidade, mesmo com um grau de complexidade muito maior. Se usarmos a equação (16) para encontrar o tempo em função de x e substituir esse tempo na equação (17), vamos achar o y em função do x , isto é, a posição vertical do projétil em função da posição horizontal do projeto. Chegaremos em:

$$y(x) = \left(\tan \theta + \frac{g}{\gamma v_0 \cos \theta} \right) x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_0 \cos \theta} \right). \quad (19)$$

A equação obtida não é algebricamente resolúvel para θ , de modo que, conhecidos os valores de x e y do alvo, a determinação de sua solução requer o uso de métodos computacionais. No entanto, recorrer ao computador para cada desafio não é a estratégia mais prática.

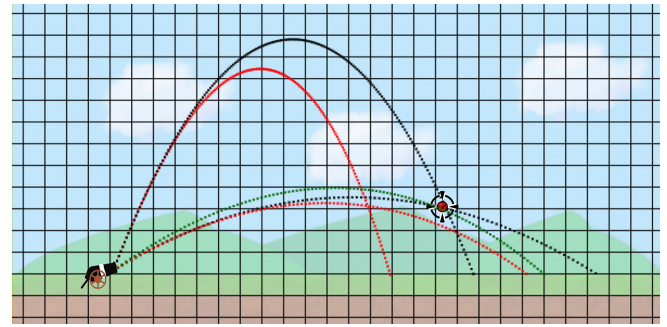


Figura 3: Lançamentos preparados para solução do desafio 16. (a) As curvas pretas correspondem à solução com velocidade inicial ajustada em $v_0 = 70\text{ m/s}$ e viscosidade nula do ar, obtendo ângulos de lançamento $\theta_- = 32^\circ$ e $\theta_+ = 69^\circ$. (b) Em vermelho, trajetórias do projétil com condições iniciais idênticas às definidas em (a), mas considerando efeito de viscosidade do ar de $\eta = 1,8\text{ Pa.s}$. (c) Em verde, trajetória do projétil com ângulo de lançamento de $\theta'_- = 36^\circ$.

Considerando que a viscosidade do ar na atmosfera terrestre é $\eta \approx 1.8 \times 10^{-5}\text{ Pa.s}$ [20], e, portanto, permite uma abordagem numérica de refinamento da solução inicialmente obtida desprezando a resistência do meio.

Aplicando a expansão de *Taylor* para o logaritmo natural na equação 19 e desprezando os termos de ordem superior à segunda, obtém-se a seguinte expressão:

$$y(x) \approx x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} - \frac{\gamma gx^3}{3v_0^3 \cos^3(\theta)}. \quad (20)$$

Olhando a expressão aproximada, percebemos que os 2 primeiros termos correspondem à parábola de um lançamento oblíquo livre do efeito da viscosidade do meio. O terceiro termo

$$\Delta y = \frac{\gamma gx^3}{3v_0^3 \cos^3(\theta)}, \quad (21)$$

por sua vez, corresponde ao módulo de uma correção do valor de altura devido à viscosidade não-nula do meio. Nesse sentido, podemos reaproveitar a equação 9 utilizando o valor efetivo da altura do alvo

$$y_{\text{eff}} = y_{\text{alvo}} + \Delta y \quad (22)$$

e mantendo o mesmo valor de x_{alvo} . Para fins de comparação, na Figura 3 as curvas vermelhas indicam o novo comportamento das trajetórias balística na condição $\theta_- = 32^\circ$ e $\theta_+ = 69^\circ$, adotando $v_0 = 70\text{ m/s}$ em ambos os casos. Observa-se que o lançamento alto não tem alcance suficiente para atingir o alvo, enquanto o lançamento baixo passa por baixo do alvo, passando pelo ponto P(306 m, 44 m). Dessa forma, medimos o valor da correção $\Delta y = 18\text{ m}$ e valor ajustado de altura efetiva de 80 m, conforme calculado pela equação 22.

Uma vez que o lançamento alto tem alcance menor do que a coordenada horizontal do alvo, ele não é adequado ao processo de correção proposto. De maneira geral,

os lançamentos baixos são menos sensíveis aos efeitos de viscosidade e devem ser sempre preferidos ante os lançamentos com ângulos de elevação maiores.

Utilizando a equação 9 considerando a altura efetiva de 80 m, obtemos nesse desafio os ângulos de $\theta'_- = 36^\circ$ e $\theta'_+ = 68^\circ$. Conforme o esperado, o ângulo de lançamento alto fracassa, enquanto o ângulo de lançamento baixo tem elevação corrigida em 4° e atinge o alvo desejado, conforma mostrado na curva verde apresentada na Figura 3.

A possibilidade de verificar o movimento com e sem atrito viscoso constitui um diferencial essencial desta simulação. Enquanto outros simuladores se limitam a representar visualmente as trajetórias (fornecendo apenas resultados qualitativos ou valores finais), este permite a coleta de dados ao longo de todo o experimento. Essa característica amplia significativamente seu potencial pedagógico, tornando-o útil tanto no ensino básico quanto em níveis mais avançados, como cursos de graduação.

É importante ressaltar, entretanto, que, embora as simulações computacionais ofereçam diversas vantagens para o ensino de Física, é importante considerar algumas limitações inerentes à sua própria natureza. Por mais que promovam interatividade e permitam a coleta de dados, elas não reproduzem integralmente a experiência prática com equipamentos físicos reais, especialmente no que diz respeito ao manuseio direto e à percepção sensorial dos fenômenos. Além disso, os resultados gerados tendem a ser ideais, sem os ruídos e incertezas naturais das medições experimentais, o que pode levar a uma compreensão menos crítica da natureza dos dados, não havendo uma discussão prévia sobre isso. Apesar disso, quando bem integradas a propostas pedagógicas mediadas por professores, essas ferramentas podem complementar de forma significativa o processo de aprendizagem.

5. Conclusões

O uso de simulações computacionais no ensino de física demonstrou ser uma ferramenta poderosa para complementar e enriquecer a experiência educacional. Neste trabalho, desenvolvemos e analisamos simulações interativas voltadas para o ensino de conceitos fundamentais de cinemática e dinâmica, como MRU e MRUV, máquina de *Atwood* e determinação de trajetória balística.

As simulações foram projetadas com o objetivo de promover a aprendizagem ativa, permitindo que os estudantes ajustem parâmetros iniciais, realizem medições e analisem resultados em um ambiente controlado e acessível. A inclusão de funcionalidades como modos de desafio foi incluída para incorporar elementos de gamificação às simulações e permitir a reprodutibilidade dos resultados em ambientes com muitos estudantes.

Um aspecto que merece destaque é que as simulações desenvolvidas neste trabalho se enquadram no terceiro

nível de interatividade, conforme a classificação discutida anteriormente. Característica que as diferencia de grande parte do que já se encontra disponível na literatura, tal característica reforça seu potencial como ferramenta didática robusta para múltiplas abordagens de aprofundamento.

As simulações propostas representam uma contribuição técnica e metodológica, potencialmente didática, para o ensino de cinemática, alinhando-se a padrões de alto nível de interatividade e seu potencial pedagógico está fundamentado em evidências indiretas, como a adoção de estratégias consagradas em olimpíadas científicas [8–10]. Complementarmente, os simuladores foram utilizados com turmas de estudantes do oitavo e nono ano do ensino fundamental, com propósito de testes, sem coleta de dados de pesquisa estruturados. No teste foi percebido um grande engajamento dos estudantes, bem como êxito na execução das etapas de coleta de dados almejadas pela proposta. A experiência aponta para o próximo passo na utilização do material, que pode ser usado em uma pesquisa estruturada futura visando aferir sua eficácia enquanto ferramenta educacional.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Curso Alberto Santos Dumont (CASD) pela colaboração que proporcionou o uso desses recursos didáticos para estudantes de 8º e 9º anos do ensino fundamental na cidade de São José dos Campos.

Disponibilidade de Dados

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

Referências

- [1] A. Medeiros e C.F. Medeiros, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **24**, 77 (2002).
- [2] I. Yamamoto e V.B. Barbeta, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **26**, 177 (2004).
- [3] D.M. Jaime e A.A. Leonel, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **46**, e20230309 (2024).
- [4] M. Machado, I.S. Alves, E.R.R.M. Maia, A.A.S. Magalhães e I.B. Cordeiro, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43** (2021).
- [5] D.J.M. Santos, D.P. Pastorio, H.S. Rosa e C.C. Roso, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **46**, e20230300 (2024).
- [6] N. Studart, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20210362 (2022).
- [7] C.E. Aguiar, M. Moura e M.F. Barroso, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20210329 (2022).
- [8] SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA, *Olimpíada Brasileira de Física 2021*, disponível em: https://app.graxaim.org/obf/2021/ga/obf2021_pe_nivel2.pdf, acessado em 03/07/2025.
- [9] Comitê da Olimpíada Iberoamericana de Física, *Olimpíada Iberoamericana de Física 2021*, disponível em:

- [https://www1.fisica.org.br/~oibf/home/wp-content/uploads/2021/12/Questão_Experimental%20\(POR\).pdf](https://www1.fisica.org.br/~oibf/home/wp-content/uploads/2021/12/Questão_Experimental%20(POR).pdf), acessado em 03/07/2025.
- [10] Ipho Comitee, International Physics Olympiad 2022, disponível em: https://ipho.olimpicos.net/pdf/IPhO_2022_Q4.pdf, acessado em 03/07/2025.
- [11] J. Duckett, em: *HTML and CSS: Design and Build Websites* (John Wiley & Sons, Indianapolis, 2011).
- [12] D. Flanagan, em: *JavaScript: The Definitive Guide: Master the World's Most-Used Programming Language* (O'Reilly Media, Sebastopol, 2020), 7 ed.
- [13] J. Spurlock, em: *Bootstrap: Responsive Web Development* (O'Reilly Media, Sebastopol, 2013).
- [14] I. Guilhon e V.H. Stein, *Simulador computacional: Movimento retilíneo uniforme (mru) e uniformemente variado (mruv)*, disponível em: <https://www.nivelolimpico.com.br/simulacoes-mru-mruv>, acessado em 14/07/2025.
- [15] I. Guilhon, *Simulador computacional: Lançamento oblíquo*, disponível em: <https://www.nivelolimpico.com.br/simulacoes-lancamento-obliquo>, acessado em 14/07/2025.
- [16] T. Walsh, *Projectile motion*, disponível em: <https://ophysics.com/k8.html>, acessado em 21/10/2025.
- [17] T. Walsh, *Exploring projectile motion concepts*, disponível em: <https://ophysics.com/k9.html>, acessado em 21/10/2025.
- [18] T. Walsh, *Projectile motion: Tranquilize the monkey*, disponível em: <https://ophysics.com/k10.html>, acessado em 21/10/2025.
- [19] R.B. Bird, W.E. Stewart e E.N. Lightfoot, em: *Transport Phenomena* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001), 2 ed.
- [20] S. Clark, *Ayden Energies Journal* **11**, 25 (2023).