

Louis de Broglie, “Os princípios da nova mecânica ondulatória”: tradução e notas**

Louis de Broglie, “The Principles of the New Wave Mechanics”: translation and Notes

Pedro Sérgio Rosa¹, Eduardo Simões², Leon Farhi Neto²

¹Faculdade de Tecnologia de Tatuí “Professor Wilson Roberto Ribeiro de Camargo”, SP, Brasil.

²Universidade Federal do Tocantins, Palmas, TO, Brasil.

Recebido em 11 de fevereiro de 2026. Revisado em 25 de junho de 2026. Aceito em 21 de julho de 2026.

Este artigo evidencia que na parte final do artigo *Les Principes de la Nouvelle Mécanique Ondulatoire*, já aparecem as análises sobre os trabalhos de Schrödinger e de Heisenberg publicados em 1926. Schrödinger, através de quatro artigos seminais, mostrou que era possível resolver o problema da estabilidade das trajetórias dos elétrons no modelo atômico de Bohr, partindo da condição de quantização como um problema de autovalor, interpretando as equações de Heisenberg de acordo com a teoria ondulatória de De Broglie. Por outro lado, Heisenberg, Born, Pauli e Leon Brillouin, afirmavam que todas as informações oriundas do interior dos átomos poderiam ser obtidas pelo estudo dos seus espectros. Heisenberg considerava imprudente falar das posições e das velocidades dos elétrons intra-atômicos, preferindo representar o estado do átomo por grandezas diretamente ligadas às frequências e intensidades espectrais observáveis. No lugar de cada coordenada q_l e de cada momento p_l incluídos na teoria de Bohr, ele introduziu uma matriz de dupla entrada com aspecto de um determinante. Heisenberg preferiu um caminho “mais abstrato” para interpretar a função de onda de Schrödinger; a onda associada à partícula material de Louis de Broglie perderia sua realidade física.

Palavras-chave: História da Ciência, Filosofia, Mecânica Quântica, Teoria, Ensino de Física.

This article highlights that the final part of the article “*Les Principes de la Nouvelle Mécanique Ondulatoire*” already contains analyses of the works of Schrödinger and Heisenberg published in 1926. Schrödinger, through four seminal articles, showed that it was possible to solve the problem of stability of electron trajectories in the atomic model of Bohr, starting from the condition of quantization as an eigenvalue problem, interpreting Heisenberg’s equations according to the wave theory of De Broglie. On the other hand, Heisenberg, Born, Pauli and Leon Brillouin claimed that all information coming from the inside of atoms could be obtained by studying their spectra. Heisenberg considered it unwise to talk about the positions and velocities of intra-atomic electrons, preferring to represent the state of the atom by quantities directly linked to the frequencies and intensities observed in the spectra. In place of each coordinate q_l and each moment p_l included in Bohr’s theory, he introduced a double input matrix with the aspect of a determinant. Heisenberg preferred a “more abstract” way to interpret the Schrödinger wave function; the wave associated with the material particle of Louis de Broglie would lose its physical reality.

Keywords: History of Science, Philosophy, Quantum Mechanics, Theory, Physics Teaching.

1. Introdução

Na tradução deste artigo: *Les Principes de la nouvelle Mécanique Ondulatoire* (*Os Princípios da nova Mecânica Ondulatória*) de Louis de Broglie de novembro de 1926, discutiremos a sua recepção aos trabalhos de Schrödinger e de Heisenberg publicados neste mesmo ano. Sabemos historicamente que a recepção inicial às ideias de De Broglie defendidas em sua tese de doutorado em 1924, inicialmente não foram muito bem aceitas por Schrödinger, mas ambos compartilhavam uma imagem

real do mundo físico, caminhando paralelamente na direção da construção determinista da explicação dos fenômenos naturais. Ambos estavam inclinados a defender uma interpretação causal da mecânica quântica.

Em seu artigo: *Louis de Broglie a-t-il adhéré à l’interprétation de Copenhague (1928–1952)?* Adrien Vila Valls [2] questiona se houve ou não adesão do físico francês à interpretação do “grupo de Bohr”. Num período em que Louis de Broglie concebia suas ideias teóricas com criatividade, poderíamos identificá-lo como um espírito intuicionista. Planck, em uma Conferência [3] proferida em 1926 na Universidade de Dusseldorf, discute em alguns trechos da apresentação como a *intuição*¹

*Endereço de correspondência: eduardosimoes@uft.edu.br

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

** Título do artigo original: *Les Principes de la Nouvelle Mécanique Ondulatoire* [1].

¹ Abbagnano [4], define *Intuição* como a “relação direta (sem intermediários) com um objeto qualquer; por isso, implica a

pode ajudar durante o processo de criação científica e como ela por si só é insuficiente para a obtenção de uma teoria consistente ao “final”. Neste texto, com um olhar transparente sobre a epistemologia da ciência, Max Planck, oscila entre a lógica da razão e o poder instantâneo da imaginação fértil e criativa.

...se em todo trabalho de pesquisa indutiva é indispensável uma hipótese adequada, então é imperioso indagar como se podem encontrar tais hipóteses. Infelizmente, não há receita para isso. A lógica é insuficiente, mesmo quando associada ao mais rico e variado tesouro de experiência. O que importa é a *intuição imediata*², a inspiração feliz. Muitas vezes se trata de uma aproximação de pensamentos, à primeira vista muito ousada, só podendo vir de uma imaginação criadora, aguda e original, guiada por um conhecimento exato dos fatos [3].

Logo abaixo ele continua com sua imaginação filosófica acerca da melhor saída para o mundo da hipótese científica.

Convém não esquecer que toda hipótese é obra de uma fantasia descobridora e a imaginação é uma *faculdade intuitiva*³. Ora, se a imaginação é indispensável para se criar uma hipótese, também não deixa de ser uma ajudante de valor duvidoso quando se trata de elaborar uma teoria racional ou construir uma demonstração lógica. É frequente um cientista chegar a generalizações apressadas e insustentáveis por ter confiado demais em ideias intuitivas, uma confiança até explicável diante de muitos sucessos obtidos anteriormente em alguns pontos específicos. Cabe também acrescentar que, seja por comodismo, seja por motivos de ordem sentimental, os criadores de uma teoria nova e eficaz sentem-se pouco dispostos a introduzir mudanças importantes nas ideias e no modo de pensar que os levaram ao êxito. Ao contrário, muitas vezes recorrem ao

peso da autoridade legitimamente adquirida para manter os antigos pontos de vista. O resultado de tal atitude será frear seriamente a evolução normal da teoria [3].

Em relação à mecânica de Newton e à importância que ele atribuiu ao conceito de força, por exemplo, Planck é categórico em afirmar que esta, na nova física, perdeu sua significação fundamental, sendo preterida pela noção de trabalho e de potencial. No entanto, Planck considera que a ausência do conceito de força na nova mecânica diminuiu fortemente o caráter intuitivo das leis físicas. Para Planck, a ausência deste caráter intuitivo, leva sempre a pensar na força física como uma entidade real.

Há na física muitos conceitos intermediários semelhantes à força newtoniana: servem como auxiliares graças a seu aspecto intuitivo. Sob esse aspecto, menciono a ideia da pressão osmótica, que foi tão fecunda em físico-química. Tal noção foi introduzida por Van't Hoff para tornar intuitivas as leis físicas das soluções, sobretudo a lei do abaixamento do ponto de fusão e da tensão de vapor. É difícil evidenciar a pressão osmótica, que só imperfeitamente se deixa medir; é preciso recorrer a uma aparelhagem complicada, usando o que se chama de paredes semipermeáveis. A intuição profunda do grande cientista é tão mais admirável por ter ele conseguido formular suas leis apoiando-se em um reduzido material de observações. Na fórmula habitual, das leis de Van't Hoff, a pressão osmótica intervém tão pouco quanto a força newtoniana na mecânica moderna. Existem outros conceitos intuitivos, diferentes desses, que se mostraram muito fecundos para a elaboração de hipóteses; mas, ao contrário dos que acabamos de citar, eles atrapalharam o progresso no decurso da evolução ulterior da física. Entre esses conceitos, um merece destaque. Assim como se estava habituado a suspeitar da existência de uma ação causal de uma força por trás de todas as transformações naturais, também houve a tendência a chamar de substância toda grandeza invariável, toda constante. Embora tenha tido um papel importante na física desde tempos imemoriais, esse conceito nem sempre contribuiu para seu progresso. Primeiro, é evidente que toda lei de conservação pode ser expressa em termos de substância, e esse modo de representar as coisas tem a vantagem de tornar intuitiva a lei, facilitando seu uso [3].

Após discutir a importância ou não do uso da *intuição* como força inicial criadora de teorias, Planck considerou que os sucessos e insucessos do uso dela a partir de

presença efetiva do objeto. A *intuição* foi entendida desse modo ao longo da história da filosofia, a começar por Plotino, que emprega esse termo para designar o conhecimento imediato e total que o Intelecto Divino tem de si e de seus próprios objetos”. Abbagnano [4], define *Razão* como, “1) Referencial de orientação do homem em todos os campos em que seja possível a indagação ou a investigação. Nesse sentido dizemos que a Razão é uma “faculdade” própria do homem, que o distingue dos animais; 2) Fundamento ou Razão de ser. Visto que a Razão de ser de uma coisa é sua essência necessária ou substância expressa na definição, assume-se às vezes por “Razão” a própria substância ou a sua definição. Este é um significado frequente na filosofia aristotélica ou nas correntes nela inspiradas...”

² Grifo dos tradutores.

³ Grifo dos tradutores.

imagens conceituais são auxiliares valiosos, mas devemos ao fazer o uso dela, ter sempre cautela.

Tudo isso prova que as imagens e os conceitos que nelas se baseiam, embora sejam auxiliares indispensáveis da pesquisa em física e, em muitos casos, permitam abrir o caminho para novos conhecimentos, devem ser usados com a maior circunspeção, mesmo que seu valor não tenha sido contestado durante algum tempo.

Depois da descoberta, o único guia na via do progresso é a medida, com as noções que lhe estão imediatamente ligadas ou que dela se deduzem pela lógica. Qualquer outro tipo de dedução, sobretudo as que se apoiam numa suposta evidência, deve ser considerado com certa desconfiança. *É a razão, não a intuição, que decide qual o poder de uma demonstração que usa conceitos bem definidos*⁴ [3].

Ao citar Planck em sua descrição sobre as noções de razão e intuição, tentamos entender estes dois elementos do ponto de vista da construção teórica pelo cientista e da aquisição de novos conhecimentos. Apesar de Planck, a princípio, atribuir papel importante à intuição, observamos que é na razão que ele deposita toda a sua fé na evolução da física: *É a razão, não a intuição, que decide qual o poder de uma demonstração que usa conceitos bem definidos*. Para Planck, a única via do progresso é a *medida* e as implicações lógicas que dela se pode deduzir.

Louis de Broglie procurava equilibrar razão e intuição. Ao utilizar a razão de forma analítica, ele foi capaz de demonstrar a equação do comprimento de onda na forma relativística, através do quadrvetor energia-momento. Paralelamente, sua intuição foi fundamental ao identificar que os princípios de Fermat (óptica) e de Maupertuis (mecânica) poderiam convergir para sustentar essa nova visão da matéria [5].

Vila Valls [2] observa que os interesses dos historiadores da física concentram-se particularmente no período em que Louis de Broglie concebeu uma nova Mecânica Ondulatória, entre 1922/24, que é um tanto reducionista, pois fazem com que grande parte de sua carreira, durante a qual ele concordou publicamente com as ideias de Niels Bohr e de Werner Heisenberg sobre a interpretação da mecânica quântica, seja ignorada, isto é, depois de 1927.

Louis de Broglie volta à sua interpretação causal “somente” em 1952⁵ quando surgem as publicações

de David Bohm [6, 7]. Não se pode dizer, sem uma pesquisa aprofundada de suas obras originais se de fato ele abandonou a causalidade no período em que Valls acredita que ele concordou com Bohr e Heisenberg sobre a interpretação da mecânica quântica⁶. O período de 1922 a 24 pode ser considerado, bastante criativo e original na carreira de Louis de Broglie. Nesta fase, seu espírito intuitivo obtém resultados expressivos no desenvolvimento da física teórica.

Após a defesa da tese de doutorado em 25 de novembro de 1924, Louis de Broglie continuou a desenvolver seu trabalho de pesquisa teórica sobre os misteriosos *quanta*, como ele costumava conceber. Entre as várias tentativas de estabelecer uma teoria consistente para os *quanta* de Planck, nos anos 1926-1927, de Broglie propôs duas interpretações, uma a partir da “onda piloto” e outra na forma da chamada teoria da “dupla solução”. Este caminho seguido por De Broglie é fundamental para entendermos o início do distanciamento da sua interpretação causal da mecânica quântica, se é que podemos admitir que a dupla solução não continua sendo uma interpretação determinista. Nos dois próximos tópicos, iremos descrever de forma sucinta a influência de outros dois físicos igualmente geniais e importantes no desenvolvimento da mecânica quântica, Erwin Schrödinger e Werner Heisenberg.

2. Schrödinger e a Recepção à Tese de Louis de Broglie – A Mecânica Ondulatória

O período entre 1924 e 1927 é extremamente rico no debate filosófico sobre o entendimento teórico e a formulação matemática dos novos princípios físicos que

que começaram a “não compreender” a mecânica quântica e a questionar o que representava seu formalismo abstrato. O mais brilhante foi David Bohm, que lecionou mecânica quântica na Universidade de Princeton em 1947 e 1948. Ele passou a teoria ao crivo, com seus alunos, e publicou em 1951 um tratado no qual ele expôs em termos matemáticos simples, sem axiomática refrigerante, indo do concreto ao abstrato e conservando tanto quanto possível a linguagem imagética e sugestiva da mecânica clássica. O livro foi um sucesso. De menor altura de visão do que o de Broglie (Bohm tinha trinta anos de diferença em relação a ele!), era mais direto e mais prático. Três vezes mais denso, ele tratou de muitos problemas, deu a teoria precisa de experimentos geralmente apresentados sob a forma abstrata e procurou descrever o que realmente acontece em um dispositivo de medição. O livro era ortodoxo, mas Bohm seguiu a mesma evolução De Broglie após seu próprio curso do mesmo ano: Ele finalmente achou que a teoria não o satisfazia e, no ano seguinte, propôs uma nova interpretação, na qual reintroduzia a noção de trajetória para as partículas. Ele a desenvolveu com o ardor de seus trinta anos e, como estava em Princeton, mostrou seu trabalho a Einstein. Este, para sua grande surpresa, diz-lhe que já conhecia esta ideia: “*É a teoria da onda piloto que de Broglie propôs há vinte e cinco anos*”, disse-lhe. Bohm citou então De Broglie no seu artigo e enviou-lhe um “preprint” em 1951, muito antes da sua publicação”.

⁶ Na autobiografia da década de 1950 [9] ele assumirá que jamais se satisfaz com a interpretação de Copenhague porque a necessidade de uma explicação causal para ele era imprescindível.

⁴ Grifo dos tradutores.

⁵ David Bohm publicou um artigo importante na *Physical Review*, neste ano, que em certo sentido se aproximava muito das ideias iniciais de Louis de Broglie sobre a interpretação da Mecânica Quântica. Lochak [8] faz um comentário bastante interessante sobre a publicação do livro de Bohm, *Quantum Theory* de 1951 – “Pode-se pensar que essas reações eram as de alguns físicos “antiquados”, mas também foram as de jovens teóricos

estavam surgindo. O ano de 1926 estabelece um novo tempo para a história da física na primeira metade do século XX. Neste ano, Erwin Schrödinger publicou 4 artigos memoráveis na revista *Annalen der Physik*.

Schrödinger em sua primeira leitura à Tese de Louis de Broglie achou-a um lixo; *isto é um lixo* [5]. Esta frase, segundo o relato do professor Victor Henri⁷, foi dita por Schrödinger duas semanas após ter recebido e lido a cópia da tese de Louis Broglie. Victor Henri havia obtido de Paul Langevin uma cópia da tese de De Broglie. Como não conseguiu entendê-la, passou-a para Schrödinger que voltou duas semanas depois, dizendo: “Isso é um lixo”. Visitando Paris após algum tempo, Victor Henri relatou o fato a Langevin, que respondeu: “Eu penso que Schrödinger está errado; ele deve olhá-la novamente!”. De volta a Zurich, Henri passou a mensagem para Schrödinger: “Você deve ler a tese de De Broglie novamente. Langevin pensa que este é um trabalho muito bom” (Mehra; Rechenberg, 1987, vol. 5, parte 2, p. 414). É claro que Schrödinger leu novamente o trabalho de De Broglie, pois a influência sobre ele foi muito forte, e a frase transcrita acima teria sido apenas uma primeira reação, não dizendo respeito às opiniões futuras de Schrödinger sobre o trabalho de Louis de Broglie.

Martins [10, 11]⁸ descreve de forma detalhada como o físico austríaco concebeu brilhantemente a mecânica ondulatória. Segundo Martins [11], a criação da mecânica ondulatória por Schrödinger não foi um evento súbito, mas o resultado de uma trajetória intelectual cuidadosamente construída [11]. Desta forma, três pontos são importantes durante o processo de construção intelectual: *preparação intelectual*, *contexto histórico* e *insight individual*. Seguindo a proposta de Martins [11], podemos classificar, neste caso, Schrödinger, Heisenberg e De Broglie em que escola de pensamento? Do ponto de vista da criação e da ousadia criativa, seria possível inserir Louis de Broglie em qual das linhas de pensamento filosófico: Racionalismo, Empirismo ou Idealismo? Creio que em nenhuma delas. Poderíamos pensar De Broglie como *intuicionista*, em função, assim como Schrödinger, da grande capacidade de *insight*⁹. Heisenberg por seu lado tinha forte influência do positivismo de Comte, que

pregava a ciência como único conhecimento que seria válido.

De acordo com Martins (2026, p. 6), o artigo publicado por Schrödinger no início de 1923 [12]¹⁰, com título: *Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons* – (Sobre uma propriedade notável das órbitas quânticas de um único elétron), pode ser considerado um passo fundamental em direção à construção da teoria da mecânica ondulatória. Martins [11], comenta que Schrödinger combinou a teoria atômica com algumas considerações da teoria da relatividade geral, seguindo uma concepção proposta por Herman Weyl em seu livro: *Raum-Zeit-Materie* (“Espaço-tempo-matéria”) [13].

Seria necessário um outro espaço para uma análise comparativa mais aprofundada entre os trabalhos científicos de Louis de Broglie e Erwin Schrödinger, aqui iremos nos ater ao primeiro contato de De Broglie com as publicações iniciais de Schrödinger sobre a criação da Mecânica Ondulatória, por isso consideramos que a tradução deste artigo do Louis de Broglie do final de 1926 é historicamente importante para a historiografia da ciência, principalmente porque neste período, os debates sobre os fundamentos da nova física, a mecânica quântica estavam no seu apogeu.

Segundo Martins [11], Schrödinger deduziu uma equação para as órbitas do elétron em que poder-se-ia considerar que as condições quânticas dessas órbitas seriam verdadeiras, ou seja, que elas seriam suficientes para determinar a energia de movimento da partícula material. Schrödinger também considerou neste artigo que estas propriedades seriam suficientes para tornar o expoente do fator de distância do espectro um múltiplo inteiro de h/γ . Sendo h , a constante de Planck e γ uma constante a ser determinada. De acordo com Martins [11]: “Schrödinger utilizou uma equação de Weyl para obter a relação entre o padrão de comprimento l em dois pontos diferentes do espaço, P e P' , introduzindo uma constante γ a ser determinada”. De acordo com Mehra e Rechenberg [14], γ estaria diretamente relacionada ao potencial de Coulomb, sendo um fator multiplicativo do potencial vetor axial.

A dedução de Schrödinger mostrava a existência de um fator periódico, nas órbitas eletrônicas. Analisando a possibilidade de γ ser da ordem de h , Schrödinger propôs um valor puramente imaginário, sugerindo conexões profundas entre a teoria quântica e a geometria do espaço-tempo. Esse trabalho representou um passo importante em direção à mecânica ondulatória, embora suas implicações não fossem imediatamente claras, mesmo para ele. Há alguma semelhança entre esse resultado e a teoria de Louis de

⁷ Victor Henri (6 de junho de 1872 – 21 de junho de 1940) foi um físico-químico e fisiologista russo. Ele nasceu em Marselha, filho de pais russos. É conhecido principalmente como um dos primeiros pioneiros na cinética enzimática. Ele publicou mais de 500 artigos em uma variedade de disciplinas, incluindo bioquímica, química física, psicologia e fisiologia.

⁸ A sequência das publicações, de acordo com Martins [11] seria: [1] E. Schrödinger, Ann. Phys. 384, 361 (1926, p. 20). E. Schrödinger, Ann. Phys. 384, 489 (1926); E. Schrödinger, Ann. Phys. 385, 437 (1926); [4] E. Schrödinger, Ann. Phys. 386, 109 (1926).

⁹ Existem desdobramentos filosóficos referentes ao termo que são passíveis de melhor definição. Somente a capacidade de ter insights não é suficiente para a aplicação do termo. Neste sentido, assim como Schrödinger, Louis de Broglie também apresentava as características de acordo com Martins [11]: *preparação intelectual*, *contexto histórico* e *insight individual*.

¹⁰ O artigo foi recebido (Eingegangen) para publicação em 05 de outubro de 1922.

Broglie para o átomo, que será mencionada adiante [11].

Em 1923, Louis de Broglie estava trabalhando em sua teoria de síntese onda-corpúsculo na tentativa de resolver o misterioso problema dos quanta que Planck havia introduzido em sua hipótese do problema da radiação do corpo negro [5]. Portanto, é muito provável que ele não tenha tido contato com as publicações de Schrödinger deste período. Por isso, consideramos que ao traduzir este artigo para o português, estamos contribuindo não só com a historiografia da ciência, mas também com a formação de professores e estudantes da física. No artigo traduzido, verificamos que De Broglie [1], cita os artigos de Schrödinger, indicando como: “memórias” A, B, C [15, pp. 361–376]¹¹. No entanto, temos que responder à seguinte questão: como se deu o contato entre Louis de Broglie com as publicações de Schrödinger? A resposta é simples: através de revistas científicas. A questão a ser respondida é: Quem informou à Louis de Broglie que estes trabalhos de Schrödinger eram importantes? Esta pergunta parece difícil de ser respondida, mas, De Broglie conheceu Schrödinger por meio de suas publicações científicas em revistas como *Annalen der Physik* e *Zeitschrift für Physik*, a partir de 1926, enquanto Schrödinger teve contato com as ideias de De Broglie primeiro, ao ler sua tese e artigos.

Após a leitura da tese de Louis de Broglie, Schrödinger publicou o artigo: *Quantisierung als Eigenwertproblem* [11]¹² – *Quantização como um problema de autovalor*. Schrödinger sintetizou a mecânica ondulatória em um artigo em inglês, publicado na revista *Physical Review* [16]¹³ em dezembro de 1926, portanto, Louis de Broglie não teve acesso a este artigo antes de ter publicado o seu artigo de novembro de 1926.

De Broglie teve acesso à publicação do Conselho de Solvay de 1911, que fora editado por seu irmão Maurice de Broglie e por Paul Langevin, seu futuro orientador de Tese. A publicação fora feita majoritariamente em francês, no entanto, as discussões ocorriam quase que exclusivamente em alemão e os artigos de Planck, Einstein e Sommerfeld estavam em alemão. É possível que Louis de Broglie lia em alemão, ao menos artigos científicos. Em Pais [17], Jammer [18] e Darrigol [19], é possível inferir que o físico francês tinha conhecimento técnico da língua alemã. Louis de Broglie acessava também os artigos em alemão através de uma leitura indireta, por meio das discussões que tinha com Leon Brillouin¹⁴. Este era um físico francês ativo no começo do século XX,

quando o alemão era a principal língua da física teórica. Quase toda a literatura fundamental da época (Planck, Einstein, Sommerfeld, Debye etc.) e consequentemente, Schrödinger e Heisenberg estava em alemão, e era praticamente obrigatório para qualquer físico de ponta fazer esta leitura. Brillouin teve contato direto com a escola alemã de física e trabalhou em temas (estado sólido, ondas, estatística) fortemente desenvolvidos na Alemanha. Ele citava e dialogava com trabalhos em alemão, sendo fluente na leitura da língua alemã. Muitos cientistas franceses da geração dele eram trilingües (francês, alemão, inglês). Não há dúvida entre historiadores da ciência: Brillouin lia alemão sem problema. Além disso, Leon Brillouin, após ter finalizado seus estudos em física na *École Normale Supérieure* em Paris e mais tarde na Sorbonne, foi para o Instituto de Física Teórica de Munique, retornando à França em 1913, onde iniciou uma tese sobre a teoria dos sólidos.

O artigo de Louis de Broglie foi publicado antes do artigo de Leon Brillouin, novembro e dezembro, respectivamente, e ambos, pelo título, tratavam do mesmo assunto, as novas concepções da mecânica ondulatória: Louis de Broglie, *Les principes de la Nouvelle Mécanique Ondulatoire*; e Leon Brillouin, *Remarques sur la Mécanique Ondulatoire*. Obviamente estas publicações estão diretamente ligadas aos trabalhos de Schrödinger e Heisenberg de 1925 e 1926. Procuramos fazer alguns apontamentos com este texto que tornassem mais claras as conexões entre a produção científica de Louis de Broglie e Erwin Schrödinger em 1925/26. Vejamos como Louis de Broglie interagiu com as ideias de Bohr através da publicação científica de Heisenberg e do talento matemático de Paul Dirac.

3. Os Princípios de Bohr e a Criação da Mecânica Quântica Matricial por Heisenberg

Aparentemente a reação inicial de Heisenberg ao trabalho de De Broglie também foi de ceticismo e desconfiança, já que o jovem físico alemão não simpatizava com a ideia de admitir uma onda real no espaço físico conduzindo as partículas materiais. Talvez esta desconfiança estivesse relacionada à forte influência sofrida pelo positivismo e operacionalismo da física-matemática, que em 1925 procurava trabalhar com probabilidades de existência não real [21]¹⁵. Em síntese, Heisenberg aceitava a posição filosófica de Bohr, de que “A teoria

¹¹ Louis de Broglie designa estas três memórias pelas letras A, B, C.

¹² A sequência correta das publicações de Schrödinger, pode ser localizada em Martins [11].

¹³ E. Schrödinger – An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules, *Physical Review* vol. (28), nº 6, 1926 (dezembro).

¹⁴ Leon Brillouin [20] publicou um artigo no *Journal de Physique et le Radium* em dezembro de 1926 com o título: *Remarques sur la Mécanique Ondulatoire*, e logo no início, ele cita a equação ψ

de Schrödinger: $\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$, onde S é um dos termos da equação de Hamilton.

¹⁵ “Por outro lado, as expressões matemáticas adequadas para representação da realidade experimental são funções de onda em espaços de configuração multidimensionais que não permitem facilmente interpretação compreensível. Fora desta cisma surge a necessidade de traçar uma linha divisória clara na descrição dos processos atômicos, entre o aparelho de medição do observador que é descrito em conceitos clássicos, e o objeto sob observação, cujo comportamento é representado por uma função de onda”;

quântica não descreve o que é, mas o que pode ser dito sobre a natureza” [22]¹⁶.

Distante no tempo dos debates efervescentes da década de 1930, mais precisamente entre os anos de 1925/27, Heisenberg em seu livro *Física e Filosofia* admitiu a possibilidade da existência das ondas de matéria [23], como previa a teoria de Louis de Broglie, apesar de questionar a existência da partícula como unidade. No texto abaixo, não é possível dizer com precisão se Heisenberg defendia o princípio da *complementaridade* proposto Bohr na interpretação da mecânica quântica. Ele descreve como Bohr procurava fazer uso deste conceito para explicar os fenômenos no interior da matéria:

Na verdade, não precisamos de maneira alguma falar em partículas. Em muitas experiências, é mais conveniente falar-se em *ondas de matéria*¹⁷; por exemplo, as ondas estacionárias de matéria ao redor do núcleo atômico. Uma tal descrição contradiria frontalmente a outra descrição, caso se ignorasse as limitações impostas pelas relações de incerteza. Levando-se em conta essas restrições, a contradição é evitada. O uso de “ondas de matéria” é conveniente, por exemplo, ao se lidar com a radiação emitida pelo átomo. Por intermédio de suas frequências e intensidades, a radiação presta informação acerca da distribuição de carga oscilante no átomo e, nesse caso, a descrição ondulatória aproxima-se muito mais da verdade do que a de partículas. Eis por que Bohr advogou o uso de ambas as descrições e chamou-as de complementares entre si. As duas descrições são, certamente, mutuamente exclusivas, pois uma certa coisa não pode ser ao mesmo tempo uma partícula (i.e., substância confinada a um volume muito pequeno) e uma onda (i.e., substância espalhada sobre uma região de dimensões muito grandes), mas se complementam uma à outra. Jogando-se com ambas as descrições, indo-se de uma à outra e de volta novamente, obteremos por fim a impressão correta desse estranho tipo de realidade que permeia os

fenômenos atômicos. Bohr faz uso, em muitas instâncias, na interpretação da teoria quântica, do conceito de complementaridade. O conhecimento da posição de uma partícula é complementar ao conhecimento de sua velocidade (ou momento linear). Se conhecermos uma dessas grandezas com alta precisão, a outra não poderá ser conhecida com essa mesma alta precisão; mesmo assim, precisaremos conhecer ambas as imprecisões a fim de determinar o comportamento do sistema. A descrição espaço-temporal dos eventos atômicos é, por sua vez, complementar à descrição determinista desses eventos. Por outro lado, a função de probabilidade obedece a uma equação de movimento (como também é o caso na mecânica newtoniana, para as coordenadas de posição) e a variação dessa função, no correr do tempo, fica completamente determinada por essa equação quântica, mas ela não permite uma descrição no espaço e tempo. Por outro lado, a observação experimental compele à descrição espaço-temporal, mas quebra a continuidade presente na função de probabilidade, por mudar nosso conhecimento do sistema [24].

Heisenberg em seu livro – *Physics and Philosophy – The Revolution in Modern Physics* [25] comenta que na época muitos físicos estavam convencidos de que essas aparentes contradições pertenciam à estrutura intrínseca da física atômica. Ele argumenta que em 1924 Louis de Broglie tentou estender o dualismo¹⁸ entre a descrição da onda e a descrição das partículas para as partículas elementares da matéria, principalmente os elétrons. Ele mostrou que uma determinada onda de matéria poderia “corresponder” a um elétron em movimento, assim como uma onda de luz corresponderia a um quantum de luz em movimento. Porém, não era tão evidente qual era o verdadeiro significado da palavra “corresponder” em seu contexto físico naquela época. De Broglie sugeriu que a condição quântica na teoria de Bohr¹⁹ deveria ser interpretada como uma afirmação sobre as ondas da matéria. Uma onda circulando em torno de um núcleo pode, por razões geométricas, ser apenas uma onda estacionária e o perímetro da órbita deve ser um múltiplo

“Somente um sistema de axiomas matemáticos da mecânica das ondas e da mecânica quântica nos autoriza a classificar a questão dos valores de posição e de impulso [momento] como um problema “falso””.

¹⁶ Esta frase representa a essência da interpretação de Copenhague e ela se baseia nos pensamentos de Niels Bohr sobre os fundamentos filosóficos da Teoria Quântica, mas, não é exatamente desta forma que ela foi dita pelo físico dinamarquês. Talvez seja possível encontrar alguma frase parecida no livro publicado pelo filho de Niels Bohr, Aage Petersen ou no próprio livro do Bohr: *Atomic Physics and Human Knowledge*. Talvez a frase seja mais ou menos desta forma: “*Physics concerns what we can say about nature*” ou “*It is wrong to think that the task of physics is to find out how nature is. Physics concerns what we can say about nature.*”

¹⁷ Grifo dos tradutores.

¹⁸ Aqui, a percepção de Heisenberg sobre uma possível “extensão” do dualismo onda-corpúsculo para as partículas materiais é limitada, já que não havia nenhuma teoria dualística consolidada para o campo eletromagnético, ou seja, não havia uma síntese para as partículas de luz nos moldes da teoria proposta na Tese de 1924, portanto, não se trata de uma extensão, mas simplesmente ideias totalmente originais e ousadas propostas por Louis de Broglie que formaram as bases da Mecânica Ondulatória de Schrödinger.

¹⁹ Em 1924, além da tese de doutorado, Louis de Broglie [26, 27] publicou duas notas curtas na *Comptes Rendus*, que estão diretamente relacionadas ao pensamento físico de Bohr: 1) Sur la définition générale de la correspondance entre onde et mouvement e 2) Sur un théorème de M. Bohr.

inteiro do comprimento da onda. Desta forma, a ideia de De Broglie conectava a condição quântica, que sempre fora um elemento estranho na mecânica dos elétrons, com o dualismo entre ondas e partículas.

Temos dois conceitos distintos de acordo com o exposto acima: a ideia de *complementaridade* e o *princípio de correspondência*. O princípio da complementaridade, na física, é um princípio segundo o qual um conhecimento completo dos fenômenos em dimensões atômicas requer uma descrição das propriedades tanto de ondas quanto de partículas. O princípio foi anunciado em 1928 pelo físico dinamarquês Niels Bohr em seu artigo: *The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory*, *Nature* 121, 580 (1928), mas, ele já havia apresentado as ideias fundamentais no Congresso Internacional de Física em Como, na Itália, em 1927. Foi somente em 1979 que a primeira formulação quantitativa do princípio de Bohr foi proposta por Wootters e Zurek, baseada em uma desigualdade teórica da informação. Eles afirmam que quanto mais claramente desejamos observar a natureza ondulatória da luz, mais devemos renunciar às informações sobre as propriedades das partículas (Starke, Basso e Maziero, 2024). Por outro lado, dependendo do arranjo experimental, o comportamento de fenômenos como a luz e os elétrons é às vezes ondulante e às vezes semelhante a partículas; ou seja, tais coisas têm uma dualidade onda-partícula. É impossível observar simultaneamente os aspectos de onda e de partícula. Juntos, no entanto, eles apresentam uma descrição mais completa do que qualquer um dos dois tomados isoladamente. O significado é que certas propriedades da natureza são mutuamente exclusivas na descrição experimental, mas igualmente necessárias para uma descrição completa do fenômeno. A complementaridade não está inserida somente na descrição experimental, ela está presente também na formulação primária da teoria a partir das relações de incerteza de Heisenberg.

O Princípio de Correspondência, era orientação filosófica para a seleção de novas teorias na física, em que uma teoria anterior poderia ter sua validação a partir de novos princípios, por exemplo, a teoria quântica não substituíra a física clássica; aquela, tornava essa um caso limite. Formulado em 1913 pelo físico dinamarquês Niels Bohr, este princípio é uma forma de pensar a física e tinha como consequência desenvolver a teoria atômica. O princípio da correspondência aplica-se a outras teorias além da teoria quântica.

Historicamente, o Princípio de Correspondência de Bohr é muito abrangente, ele supõe uma analogia entre a teoria quântica e a eletrodinâmica clássica. Este princípio estava destinado a servir como o principal guia para o progresso da teoria quântica no início dos anos vinte, incorporando-se definitivamente à mecânica quântica com o passar do tempo.

Na introdução aos Neils Bohr Collected Works, volume III – The Correspondence Principle (1918–1923),

J. Rud Nielsen [28] comenta que, o “Princípio de Correspondência” proposto por Bohr, pode ser localizado no artigo: *On the hydrogen spectrum* de 20 de dezembro de 1913, antes que a Sociedade de Física de Copenhague publicasse em seu jornal: *Fysisk Tidsskrift* – 12 (1914), 97 [29]. Neste artigo, a ideia central do princípio de correspondência era mostrar que ao unir a eletrodinâmica clássica com a teoria quântica seria possível calcular a igualdade das frequências previstas para as baixas vibrações. No geral, pode ser pensada como uma interpretação clássica para certos números quânticos muito grandes. Radder [30], observa que o termo “princípio de correspondência” deriva da física atômica e foi introduzido por Bohr em 1920, como uma forma de abordar certos problemas no campo dos espectros atômicos. Os espectros obtidos pelas teorias físicas clássicas (mecânica e eletrodinâmica) estavam empiricamente errados. Bohr tentou construir uma nova explicação teórica a partir dos princípios quânticos. Ao fazê-lo, ele foi guiado pela ideia de que para certos domínios dos fenômenos a teoria clássica e a teoria quântica deveriam levar aos mesmos resultados: ou, em outras palavras, que nesses domínios deveria haver uma “correspondência” entre as teorias em questão. Esta exigência de correspondência funcionava como uma regra heurística explícita, além disso bastante bem-sucedida, na construção da teoria quântica moderna. Na página 429 da revista *Zeitschrift für Physik*, Bohr propõem-se investigar como os movimentos descritos pelos elétrons se relacionam com os distintos estados de um oscilador de Planck, com o objetivo de mostrar que a constante K , que relaciona a frequência do oscilador e os números inteiros, pode ser obtida por meio de uma simples comparação entre o espectro emitido e os movimentos nos estados estacionários. Esta comparação é possível a partir do princípio de correspondência.

Vamos verificar como Louis de Broglie discutiu estes princípios de Bohr a partir das notas curtas: 1) *Sur la définition générale de la correspondance entre onde et mouvement* (07 de julho de 1924)²⁰ e 2) *Sur un théorème de M. Bohr* (13 de outubro de 1924)²¹. De Broglie inicia as discussões da nota de julho com a definição de frequência de acordo com a equação de Planck, com o propósito de demonstrar que a partir dos princípios de Maupertuis e Fermat é possível interpretar as condições de quantização de Bohr como condições de ressonância. No segundo parágrafo pode-se observar que ele utiliza a teoria da relatividade juntamente com a ideia de “tensor Universo”, algo que já aparecera entre os artigos de 1922/23 e na tese, para questionar a validade da definição de frequência a partir da fórmula de Planck.

Do ponto de vista da Relatividade, este enunciado não é satisfatório porque qualquer enunciado correto deve ser expresso por

²⁰ Tradução dos autores: *Sobre a definição geral da correspondência entre onda e movimento.*

²¹ Tradução dos autores: *Sobre um teorema do Sr. Bohr.*

relações entre tensores *Universo*. O movimento do móvel é caracterizado pelo seu tensor energia-quantidade de movimento; a propagação de uma onda plana é feita por um tensor cuja componente de tempo é a frequência e as componentes de espaço são aquelas de um vetor segundo à normal à onda e, tendo por grandeza $\frac{v}{V_n}$, onde V_n é a velocidade de fase nesta direção (velocidade normal). Enquanto a energia total é a soma das energias cinética e potencial, a quantidade de movimento é a soma geométrica do vetor $\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e de outro vetor cuja existência está ligada à ação do campo magnético sobre uma carga em movimento [26].

De Broglie faz uma alteração na definição da onda de fase: “Propomos definir a onda de fase com seguinte enunciado: *O tensor característico desta onda é obtido multiplicando-se por $\frac{1}{h}$ ²² o tensor energia-quantidade de movimento do móvel*”. Com esta nova definição, ele obtém às seguintes identidades:

$$E = h\nu \quad \text{e} \quad G_r = \frac{h\nu}{V_r} = \frac{E}{V_r} \quad (1)^{23},$$

onde G_r e V_r , de acordo com De Broglie são, respectivamente, a quantidade de movimento tangente à trajetória do móvel e a velocidade de fase da onda nessa direção (velocidade radial). Da segunda identidade, De Broglie afirma então que: “A segunda igualdade tem como consequências imediatas a identidade dos princípios de Maupertuis²⁴ e de Fermat e a interpretação das condições de Bohr como condições de ressonância [26].”

A partir desta hipótese, Louis de Broglie obteve um resultado geral em que a velocidade v do móvel em sua trajetória é em cada momento igual à velocidade de grupo U_r das ondas de fase nesta direção. Considerando uma dada trajetória em relação ao eixo x , ele obteve, derivando parcialmente a energia em relação ao momento linear, pelo princípio de Hamilton, que, a velocidade do móvel é igual à velocidade de grupo das ondas de fase.

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\partial E}{\partial G_r} = \frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{\nu}{V_r}\right)} = U_r.$$

No final da nota ele cita uma publicação de Leon Brillouin [31]

²² No texto original [26] ele escreve h . Porém, na nota de outubro ele fará a correção para $\frac{1}{h}$. “Nesta nota, na penúltima linha da página 39, leia $\frac{1}{h}$ ao invés de h . Dans cette Note, à l’avant-dernière ligne de la page 39, lire $\frac{1}{h}$ au lieu de h .”

²³ No caso do movimento do ponto material livre de massa própria m_0 , têm-se que $v = \beta c$ ($\beta < 1$) [32].

²⁴ A equação utilizada para o princípio da mínima ação mecânica ou princípio de Maupertuis é escrita matematicamente da seguinte forma: $\delta \int p dq = 0$. Sendo: p é o momento linear e q é a coordenada de posição. Porém, a equação mais usual é definida pelo princípio de Hamilton: $\delta \int L dt = 0$, onde L é a lagrangiana do sistema e t é o tempo.

L. Brillouin mostrou que as leis da reflexão e da refração podem ser obtidas pela aplicação do princípio de Maupertuis aos quanta de luz *desde que se admita que a quantidade de movimento do quantum seja sempre igual a sua energia $h\nu$ dividida pela velocidade da fase*²⁵. Em um meio refrativo, a reação do meio sobre o quantum deve, independentemente da sua natureza exata, traduzir-se em média pela existência de uma energia potencial do quantum e talvez de um componente da quantidade de movimento de segunda espécie. Mas, de acordo com o nosso postulado geral, a equação $G_r = \frac{h\nu}{V_r}$ está confirmada, o que está de acordo com a condição enunciada por L. Brillouin [31].

A leitura da nota de Leon Brillouin que tem apenas três páginas, permite observar que a discussão entre ambos, gira em torno da tentativa de generalização dos princípios da mínima ação mecânica (Maupertuis) e ótica (Fermat), com o objetivo de explicar todos os fenômenos óticos. Brillouin considerava ser interessante seguir por este caminho, pois por meio dele seria possível encontrar as leis da reflexão e refração. Ele considerava que uma das objeções à teoria da emissão [de Newton] de partículas de luz, como Einstein concebia, apresentava limitações, pois, o produto do índice de refração pela velocidade num meio material sendo igual ao produto no outro meio estava em contradição com os resultados experimentais, no entanto, sabemos que este produto deveria ser igual a c . Brillouin afirmou que com a introdução da mecânica dos quanta seria possível resolver esta divergência.

...verifica-se que os raios obedecem, neste ponto, à lei do plano de incidência e à lei dos senos; mas esta última apresenta-se na forma $V_1 \sin \theta_1 = V_2 \sin \theta_2$ em contradição com a experiência, uma vez que as velocidades figuram no lugar das suas inversas. A introdução da mecânica dos quanta de acordo com este raciocínio nos dará o resultado exato [31].

Portanto, Louis de Broglie, ao obter de forma generalizada a identidade destes dois princípios matemáticos da mecânica (Maupertuis) e da ótica (Fermat), possibilitou a resolução da contradição entre o resultado teórico de Snell-Descartes e os valores obtidos experimentalmente.

Na segunda nota de 1924, inicialmente De Broglie discutiu o princípio da correspondência de Niels Bohr a partir da ideia da emissão de energia pelo elétron orbitando o núcleo atômico em uma trajetória fechada. A ideia básica de Bohr era estabelecer uma relação de trocas de energia (emissão e absorção de um quantum) nas órbitas eletrônicas unindo a teoria quântica e a

²⁵ Grifo dos tradutores.

teoria eletromagnética de emissão. De Broglie propôs, então, que o movimento de um ponto material estaria relacionado com a propagação de um grupo de ondas cuja velocidade de propagação e a frequência seriam determinadas por um princípio geral a partir das grandezas mecânicas, ou seja, “a ‘*velocidade do grupo*’ dessas ondas seria igual à velocidade do móvel, de modo que um ponto material poderia de alguma forma ser definido por um estado local de concordância de fase” [27]. Com esta hipótese, o movimento do elétron em uma órbita de ordem n poderia ser representado pela superposição das ondas de frequência ν_n e ν_{n+p} em ressonância respectivamente na ordem n e $n + p$. Para um ponto do espaço, a frequência de batimento de duas ondas seria igual à diferença de suas frequências. Ao final da nota ele comenta:

Parece muito interessante notar que a configuração dos p pontos de concordância de fase se reproduz periodicamente com a frequência da $p^{\text{ième}}$ harmônica do movimento mecânico. *Existiria então no átomo algo que possuísse a frequência das ondas cuja emissão e absorção seriam possíveis*²⁶. Naturalmente, estas conclusões são válidas apenas para órbitas de nível mais elevado, mas é possível estender-se de alguma forma às órbitas com um pequeno número de quanta [27].

Retomando a narrativa sobre Werner Heisenberg e sua interação com o universo científico do período, localizamos que o físico alemão publicou seu primeiro artigo sobre mecânica quântica matricial em julho de 1925 cujo título em alemão é: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*²⁷. Heisenberg inicia o artigo com o seguinte argumento:

In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist [33].

O presente trabalho busca estabelecer uma base para a mecânica quântica teórica fundada exclusivamente sobre relações entre quantidades que, a princípio, são observáveis [34].

Observáveis na definição de Heisenberg do ponto de vista físico seriam o que pode ser medido experimentalmente e que, na formulação da mecânica matricial (1925), seria representado matematicamente por uma

matriz. Posteriormente, esta ideia foi entendida de forma geral como um operador linear hermitiano. Posição, momento, energia etc., seriam observáveis físicos.

É bem conhecido que as regras formais que são usadas na teoria quântica para o cálculo de quantidades *observáveis*²⁸, tais como a energia do átomo de hidrogênio pode ser seriamente questionada com o argumento de que eles contêm, como elemento básico, relações entre quantidades que são aparentemente *não observáveis em princípio, por exemplo, posição e período de revolução do elétron*²⁹. Assim, essas regras carecem de uma evidente fundamentação física, a menos que se queira ainda manter a esperança de que até agora quantidades não observáveis podem mais tarde entrar no âmbito da determinação experimental. Esta esperança poderia ser considerada justificada se as regras acima mencionadas fossem internamente consistentes e aplicáveis a uma gama claramente definida de problemas de mecânica quântica. A experiência, no entanto, mostra que apenas o átomo de hidrogênio e seu efeito Stark são passíveis de tratamento por essas regras formais da teoria quântica. Dificuldades fundamentais já surgem no problema dos “campos cruzados”³⁰ (átomo de hidrogênio em campos elétricos e magnéticos de direções diferentes). Além disso, a reação de átomos a campos periodicamente variáveis não pode ser descrita por essas regras. Finalmente, a extensão das regras quânticas para o tratamento de átomos com vários elétrons provou ser inviável [34].

No tópico 16 – *A mecânica quântica de Heisenberg*, da tradução, Louis de Broglie comenta que Heisenberg considera imprudente mencionar velocidades e posições dos elétrons, preferindo analisar do ponto de vista físico o estado do átomo a partir de grandezas diretamente ligadas às frequências e intensidades espectrais observáveis, escrevendo as coordenadas e momentos da partícula de forma generalizada.

Todas as informações que possuímos sobre o interior dos átomos nos são fornecidas pelo estudo dos espectros, partindo desta observação, *Heisenberg considera imprudente falar das posições e velocidades dos elétrons intratômicos e prefere representar o estado do átomo por grandezas diretamente ligadas às frequências e intensidades espectrais observáveis*³¹. No lugar de cada coordenada q_i

²⁶ Grifo dos tradutores.

²⁷ Este artigo do Heisenberg foi recebido em 29 de julho de 1925 e foi traduzido para o inglês com o título: *Quantum Theoretical Reinterpretation of Kinematic and Mechanical Relations*. Os artigos em alemão foram traduzidos por um grupo consistindo em vários tradutores, tais como: E. Sheldon, D. Robinson, G. Field and B. L. van der Waerden.

²⁸ Grifo dos tradutores.

²⁹ Grifo dos tradutores.

³⁰ Efeito Hall.

³¹ Grifo dos tradutores.

e de cada momento p_l incluídos na teoria de Bohr, introduz-se uma matriz de dupla entrada com aspecto de um determinante cujo termo geral seria

$$q_l^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t} \quad \text{ou} \quad p_l^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t}, \quad (63)$$

com a convenção adicional que q_l^{ik} e p_l^{ik} são imaginários conjugados de q_l^{ik} . As frequências ν_{ik} são as frequências de emissão do átomo que podem ser escritas na forma:

$$\nu_{ik} = \nu_i - \nu_k, \quad (64)$$

de acordo com a Lei Básica da Combinação de Ritz [1]³².

Louis de Broglie citou o trabalho de Leon Brillouin [20], onde constam as referências dos artigos em alemão sobre o começo da mecânica quântica, além de outras referências. Ele mencionou também um trabalho publicado por Paul Dirac, cujo título é: *Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom* [35, p. 570]. A página citada por Louis de Broglie refere-se parágrafo 5 – *Orbital Motion in the Hydrogen Atom*. Nela Dirac escreve a função H em coordenadas cartesianas, comentado que é necessário fazer desta forma de acordo com as ideias propostas por Pauli em um artigo ainda não publicado (*The hydrogen atom has been treated on the new mechanics by Pauli in a paper not yet published – O átomo de hidrogênio foi tratado na nova mecânica por Pauli em um artigo ainda não publicado*). Dirac [35, pp. 561–579] inicialmente escreve a *Hamiltoniana* para o átomo de hidrogênio em coordenadas cartesianas, mas logo em seguida utiliza coordenadas polares.

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{e^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}}.$$

De Broglie comenta que suas equações (69) foram aplicadas apenas ao movimento de um único móvel e que, neste caso, pareceu necessário, para obter resultados exatos, escolher para H a expressão da energia em coordenadas cartesianas retangulares como aponta Dirac em seu artigo.

Mas, em 01 de outubro de 1926, Dirac publicou um artigo com o título: *On the Theory of Quantum Mechanics* [39], onde desenvolve a mecânica matricial de Born e Heisenberg cujo princípio fundamental centrava-se na suposição de que as variáveis que descrevem um

sistema dinâmico não obedecem à lei comutativa da multiplicação, mas satisfazem certas condições quânticas. A partir deste fato, Dirac observa que é possível construir uma teoria sem saber nada sobre as variáveis dinâmicas, exceto os problemas algébricos a que estão sujeitas, e pode-se mostrar que elas podem ser representadas por matrizes sempre que exista um conjunto de variáveis uniformizadoras para o sistema dinâmico. Ele mostrou que não há um conjunto de variáveis uniformizantes para um sistema contendo mais de um elétron, desta forma não seria possível avançar teoricamente além do que fora estabelecido anteriormente. Por outro, Dirac compara com o desenvolvimento da mecânica ondulatória desenvolvida por Schrödinger [37].

Dirac considerava o desenvolvimento da teoria proposto por Schrödinger, partindo da ideia de que um sistema atômico não pode ser representado por trajetórias, ou seja, por um ponto que se move através do espaço coordenado, mas deve ser representado por uma onda nesse espaço. Schrödinger obteve do princípio variacional de Hamilton uma equação diferencial que permite satisfazer matematicamente a função de onda. Esta equação diferencial está fortemente relacionada com a equação hamiltoniana que especifica as características físicas e matemáticas do sistema, ou seja:

$$H(q_r, p_r) - W = 0.$$

Se as coordenadas e momentos generalizados são variáveis canônicas do sistema, Dirac conclui que é possível obter a função de onda na forma como Schrödinger obteve:

$$\left\{ H \left(q_r, i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r} \right) - W \right\} \psi,$$

substituindo p_r pelo operador $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_r}$. A participação de Dirac nestas discussões é extremamente importante em função da grande capacidade e habilidade matemática que ele tinha, sendo um dos principais fundadores da mecânica quântica e da eletrodinâmica quântica.

Havia em 1926 uma atmosfera riquíssima em debates orais entre os cientistas em seus próprios países, em seus laboratórios ou universidades e por meio de publicações de artigos e trocas de correspondências, como uma preparação para o Congresso de Solvay de 1927, no qual, Louis de Broglie apresentou a sua teoria da dupla solução. Neste trabalho analisamos a comunicação através de artigos publicados, tentando encontrar uma maneira propositiva de oferecer ao leitor da língua portuguesa material histórico através das pesquisas em fontes primárias que instiguem o pensamento científico e filosófico e promova um melhor nível de conhecimento no processo da educação científica, para alunos e professores.

A interpretação das grandezas se relaciona com a questão muito mais geral de conectar as mecânicas ondulatórias com o eletromagnetismo ou, melhor dizendo, de *criar uma*

³² A combinação de Rydberg-Ritz é um artifício matemático que permite calcular e reorganizar com mais facilidade os coeficientes binomiais, normalmente na forma de um produto de matrizes: $\binom{n}{p} \binom{p}{q}$. A fórmula de Rydberg-Ritz aplicada à mecânica quântica é escrita na forma: $E = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+\alpha+\beta E)^2}$ [38]. (Jastrow, R. 1948, p. 60).

*física geral do campo que contenha ao mesmo tempo o eletromagnetismo convenientemente modificado e a nova mecânica*³³. Esta física do campo deverá explicar a natureza das ondas associadas, justificar as suas equações de propagação, desvelar o sentido profundo da constante h . Deverá também mostrar porque os grupos de ondas com singularidades que constituem a matéria se enquadram todos num pequeno número de tipos: o elétron, o próton, o quantum de luz Assim se entenderá por que a matéria é atômica. Ainda não chegamos a esse ponto, mas essas questões são agora importantes para os pesquisadores [1].

Não era nosso objetivo investigar profundamente se houve uma adesão de Louis de Broglie à interpretação de Copenhague neste período (1925–27), apenas entender o contexto epistemológico das suas contribuições para o desenvolvimento da mecânica ondulatória e em consequência da mecânica quântica, pois, segundo Adrien Vila Valls, esta só ocorreria a partir de 1928. Deixamos ao leitor a tarefa prazerosa da leitura do artigo de Louis de Broglie, para que se aproprie de suas ideias e de suas dificuldades e entenda que a ciência não é um ato isolado, mas fruto de divergências, de diferentes pontos de vista e de inúmeras interpretações filosóficas. Louis de Broglie partilhava com Einstein de uma ideia de teoria unificada, mas esta unificação só emergirá um dia se o campo do debate estiver propício para novas percepções do mundo físico.

OS PRINCÍPIOS DA NOVA MECÂNICA ONDULATÓRIA³⁴

Pelo Sr. L. DE BROGLIE

Sumário. – O objetivo do trabalho é expor os princípios gerais da nova concepção ondulatória da mecânica sugerida pelo autor e confirmada pelos recentes trabalhos de Schrödinger. O autor procurou primeiro mostrar, no caso particular dos campos constantes, como os resultados de Schrödinger prolongam e completam os seus; em seguida examina se as mesmas ideias podem ser estendidas aos campos variáveis e à dinâmica dos sistemas. Resumindo, por fim, a maneira como Schrödinger conseguiu trazer a mecânica quântica de Heisenberg, Born e Jordan à nova mecânica ondulatória, ele indica rapidamente, concluindo, os problemas que coloca a conexão da teoria eletromagnética com o conjunto dessas concepções.

³³ Grifo dos tradutores. Aqui Louis de Broglie está procurando contribuir com a unificação das teorias físicas, algo que irá ocorrer com o advento da física de partículas, que irá unificar a força nuclear fraca com a força eletromagnética, ficando conhecida como unificação eletrofraca (electroweak unification). Esta unificação é um dos fundamentos do Modelo Padrão da Física de Partículas.

³⁴ Tradução nossa.

I. – DINÂMICA ONDULATÓRIA DO PONTO MATERIAL EM CAMPO CONSTANTE.

1. Propósito da apresentação. – Sob a pressão dos resultados experimentais, os físicos foram obrigados a admitir que a dinâmica antiga, mesmo ampliada pelas concepções relativísticas, não podia interpretar os fenômenos em que intervêm os quanta. Parece hoje necessário criar uma mecânica nova, que esteja intimamente ligada à teoria das ondas. Esta é a tentativa que eu tenho perseguido nos últimos anos ⁽¹⁾³⁵ e que o belo trabalho recente de Schrödinger ⁽²⁾^{36,37} completou e ampliou. Procurarei resumir em grandes linhas o estado atual da questão.

No que se segue, considerarei em primeiro lugar o movimento de um ponto material num campo constante, reservando para o terceiro parágrafo a extensão das mesmas ideias ao caso dos campos variáveis e dos sistemas de pontos materiais.

2. Lembrete de algumas noções da teoria das ondas. – Vamos considerar uma região do espaço cujas propriedades não dependem do tempo. Diz-se que um fenômeno se propaga por ondas se a função $u(x, y, z, t)$ que o representa satisfaz a equação fundamental:

$$\Delta u = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

V é uma grandeza chamada “velocidade de propagação” que varia de um ponto a outro, mas não depende do tempo. Note que V pode ser imaginário ($V^2 < 0$). Designa-se, com frequência, sob o nome de índice de refração, o quociente n da velocidade c de propagação da luz no vácuo pela velocidade V . É evidentemente a mesma coisa, dar-se V ou dar-se n em função das coordenadas.

Para interpretar os fatos experimentais, os físicos foram levados a considerar principalmente o seguinte tipo de solução da equação (1):

$$u(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos 2\pi\nu[t - \Psi(x, y, z)] \quad (2)$$

onde ν é uma constante chamada a frequência da onda, e A , uma função que representa sua amplitude em cada ponto; o argumento do cosseno é a “fase” da onda. Esta solução também pode ser considerada como a parte real da expressão:

$$u(x, y, z, t) = C e^{2\pi i \nu t} e^{2\pi i \varphi}, \quad (3)$$

³⁵ ⁽¹⁾ Ver especialmente, a *Thèse de doutorado*, Masson, 1924, e *J. Phys.*, t. 7 (1926), 1–6.

³⁶ Nota dos tradutores: Louis de Broglie utilizou esta referência no artigo original. No entanto, o primeiro artigo citado começa na página 361 e termina na página 376. O volume 79 da 4ª série corresponde ao volume 384 na contagem contínua do periódico. Ver nota 37.

³⁷ ⁽²⁾ *Ann. Der Phys.*, t. 79 (1926), 351, 489 e 734. Eu designarei estas três memórias pelas letras A, B, C.

C é uma constante, e φ , uma função, em geral imaginária, de x, y, z . Se $\varphi = a + ib$, vemos que temos:

$$\Psi = -\frac{a}{\nu} \quad A = Ce^{-2\pi b}. \quad (4)$$

Quando nos limitamos a considerar as soluções sinusoidais do tipo (2), a equação das ondas toma a forma simples onde o tempo não figura mais:

$$\Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}u = \Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}n^2u = 0 \quad (5)$$

A fase de uma onda sinusoidal é a mesma num dado instante em cada superfície da família:

$$\Psi(x, y, z) = C^{te}. \quad (6)$$

Estas são as superfícies equifásicas e, quando o tempo varia, os valores da fase progridem no espaço passando de uma para outra dessas superfícies. As curvas ortogonais às superfícies $\Psi = C^{te}$ são, por definição, nomeadas de raios da onda e chamaremos “velocidade da fase” a velocidade com que é necessário, em cada ponto, caminhar ao longo do raio para acompanhar um dado valor da fase. Se dr designa o elemento de comprimento contado no raio, encontra-se facilmente, para a velocidade da fase:

$$v = \frac{1}{\partial\Psi/\partial r} = \left[\sum_{xyz} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (7)$$

3. A ótica geométrica. – Chegamos agora a uma questão importante: existe uma relação simples entre as duas velocidades V e v ³⁸ nas equações (1) e (7)?

Para saber, tomaremos a solução sinusoidal na forma (3) e introduziremos em (5). Disso se segue:

$$-4\pi^2 \sum_{xyz} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + 2\pi\iota\Delta\varphi + \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2} = 0. \quad (8)$$

Se as derivadas segundas de φ são muito pequenas em comparação com a soma dos quadrados das derivadas primeiras, a função $\varphi(x, y, z)$ obedecerá aproximadamente à relação:

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (9)$$

colocando, por definição,

$$\lambda = \frac{V}{\nu}. \quad (10)$$

Se, além disso, V é real, φ também o é e temos por (9), (4) e (7):

$$\Psi = -\frac{\varphi}{\nu}, \quad \sum_{xyz} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{V^2}. \quad (11)$$

³⁸ Nota dos tradutores: A letra utilizada por Louis de Broglie, no original não é esta, substituiu-se por não localizar a letra original nos símbolos do editor.

As velocidades V e v podem então ser consideradas iguais, e a solução aproximada obtida é escrita:

$$u(x, y, z, t) = C \cos 2\pi\nu \left[t - \int \frac{dr}{V} \right], \quad (12)$$

onde a integral é tomada ao longo do raio que passa pelo ponto M , de coordenadas x, y, z , desde uma superfície equifásica escolhida como origem até M .

Assim, quando a equação (9) é válida, pode-se utilizar os procedimentos da ótica geométrica para o estudo das ondas. Recordemos brevemente alguns destes procedimentos. Conhecendo uma superfície equifásica, construiremos duas outras infinitamente vizinhas descrevendo em torno de cada ponto M da superfície dada, uma esfera de raio $\varepsilon V(M)$, onde ε é uma constante muito pequena, e tomando o envelope [pacote] de dupla camada destas esférulas; as superfícies assim obtidas são, com efeito, aquelas em que, nos tempos $t - \varepsilon$ e $t + \varepsilon$, se encontra o valor da fase que, no tempo t , é obtida em uma dada superfície. Pouco a pouco, constrói-se também o conjunto das superfícies equifásicas e, ao mesmo tempo, os raios encontram-se determinados como limites de linhas infinitamente quebradas. Diz-se então que as superfícies de fase foram determinadas pelo método das ondas envelopes [envoltório de ondas].

A ótica geométrica baseia-se num postulado básico chamado «princípio de Fermat». De acordo com este princípio, qualquer raio que passa por dois pontos A e B do espaço é tal que a integral curvilínea

$$\int_A^B \frac{dr}{V}$$

seja mínima:

$$\delta \int_A^B \frac{dr}{V} = 0. \quad (13)$$

Na linguagem da teoria das ondas, pode-se dizer que o tempo levado pela fase para ir de A a B é mínimo ao longo do raio. A construção das ondas envelope torna quase evidente a proposição de Fermat que, aos olhos dos discípulos de Fresnel, passou assim do posto de postulado para o posto de teorema válido sob as mesmas condições da equação (9).

4. Limites de aplicação da ótica geométrica. – Os procedimentos da ótica geométrica são aplicáveis quando a equação (9) é válida e vimos que, para isso, as derivadas segundas de φ devem ser pequenas em comparação com a soma dos quadrados das derivadas primeiras.

A cada vez que a aplicação dos procedimentos da ótica geométrica leva a uma função φ que não satisfaz esta condição, estamos certos de estar no caminho errado.

Chamaremos comprimento de onda a quantidade λ definida por (10). É preciso expressar que as derivadas segundas de φ são pequenas em relação a $1/\lambda^2$. Em uma direção l que faz, no ponto considerado, o ângulo θ com

a direção do raio, temos, por (10) e (11),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -\nu \frac{\partial \Psi}{\partial l} = -\frac{\nu \cos \theta}{V};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2} = \frac{\nu \cos \theta}{V^2} \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos \theta}{V} \frac{\partial V}{\partial l},$$

e deve ter, seja qual for θ :

$$\cos \theta \cdot \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial l} \cdot \lambda \ll 1. \quad (14)$$

De onde concluímos: os processos da ótica geométrica são justificados se a variação relativa da função V em um comprimento da ordem de λ for muito pequena.

Em particular, se a ótica geométrica leva a prever um raio curvo contido num domínio cujas dimensões são da ordem de grandeza do comprimento de onda, pode-se ter certeza de que o método utilizado para chegar a este resultado era incorreto, a equação (9) não podendo ser válida.

5. Grupo de ondas. – Pode-se imaginar que a função V dependa não só das coordenadas, mas também da frequência, considerada como parâmetro variável; diz-se então que há dispersão. Esta circunstância surge nomeadamente quando a função u deve, na realidade, satisfazer a equação de propagação:

$$\Delta u = pu + q \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (15)$$

onde p e q são funções reais das coordenadas, porque, para as soluções sinusoidais, esta equação é equivalente a (1) se:

$$V = \left(q - \frac{p}{4\pi^2\nu^2} \right)^{-1/2}. \quad (16)$$

Imaginemos agora um conjunto de ondas de frequências muito próximas propagando-se nestas condições, supondo que possamos nos ater à ótica geométrica.

As velocidades de propagação não sendo exatamente as mesmas, a amplitude resultante propaga-se ao longo dos raios com uma velocidade U diferente de V . Esta é a «velocidade do grupo» cujo valor, segundo um raciocínio clássico, é:

$$U = \left(\frac{\partial(\nu/V)}{\partial \nu} \right)^{-1}. \quad (17)$$

6. A mecânica ondulatória. – Em oposição à nova mecânica ondulatória, nomearei «antigas mecânicas» ou «mecânicas geométricas»: 1° a mecânica clássica de Newton, 2° a mecânica da relatividade. Considero a segunda como constituindo um progresso sobre a primeira; além disso, sabe-se que coincidem sempre que a velocidade do móvel é baixa o suficiente para permitir negligenciar $(v/c)^2$, em comparação com a unidade. Mas hoje, a própria dinâmica de Einstein parece-me apenas uma aproximação em relação a uma teoria mais geral

que é, para às antigas dinâmicas, o que é a teoria das ondas para a ótica geométrica.

7. Algumas definições das antigas mecânicas. – As mecânicas antigas nos ensinam que, no caso aqui considerado de campos constantes, uma certa função das coordenadas e da velocidade do móvel permanece invariável ao longo do tempo. Trata-se da energia $W(x, y, z, v)$. Na dinâmica de Einstein, temos

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + F(x, y, z), \quad (18)$$

$F(x, y, z)$ sendo a energia potencial do móvel de massa própria m_0 no ponto (x, y, z) . Para obter a expressão de W em mecânica clássica, basta desenvolver $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ em série e negligenciar os termos superiores:

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + F(x, y, z). \quad (18')$$

A constante $m_0 c^2$ é muito superior aos termos seguintes quando a mecânica clássica é válida. Nos tratados antigos, a parte variável de W , soma da energia cinética e da energia potencial, é designada como energia; a seguir, nós a designaremos por E .

Ao lado da energia, as dinâmicas antigas introduzem uma grandeza vetorial, a quantidade de movimento $\vec{g}$. Deixando de lado, por enquanto, o caso em que o móvel carrega uma carga elétrica e se move em um campo magnético, expressamos a quantidade de movimento em função da única variável v pela expressão (relativística):

$$\vec{g} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19)$$

A equação newtoniana correspondente é:

$$\vec{g} = m_0 \vec{v}. \quad (19')$$

Se eliminarmos a velocidade entre a expressão de g e a de W , conseguimos expressar g em função das coordenadas e de W . Obtemos:

$$\text{na mecânica relativística, } g = \frac{1}{c} \sqrt{(W - F)^2 - m_0^2 c^4} \quad (20)$$

$$- - \text{clássica, } g = \sqrt{2m_0[E - F]}. \quad (20')$$

8. A onda associada ao móvel. – A ideia essencial que me guiou em meus trabalhos anteriores foi associar ao movimento de qualquer móvel a propagação de uma onda. Então eu considerei uma onda sinusoidal satisfazendo à equação (1) e, admitindo que as soluções aproximadas da ótica geométrica eram válidas, escrevi a expressão desta onda na forma (12). Para estabelecer uma ligação [relação] entre a onda assim definida e o problema mecânico correspondente, fui levado a colocar:

$$W = h\nu, \quad g = \frac{h\nu}{V}, \quad (21)$$

h é a constante de Planck. A primeira relação é, de certa forma, imposta pela teoria dos quanta de luz: a segunda deriva da primeira por considerações de invariância. As relações (21) têm como consequência que a variação da fase, quando se move de dr ao longo do raio durante o tempo dt , é proporcional à variação correspondente da ação hamiltoniana, porque temos

$$2\pi\nu \left(dt - \frac{dr}{V} \right) = \frac{2\pi}{h} (Wdt - gdr). \quad (22)$$

Nas antigas mecânicas, a forma das trajetórias no campo constante é determinada pelo princípio de Maupertuis:

$$\delta \int_A^B gdr = 0. \quad (23)$$

Comparando (23) com (13), tendo em conta (21), vê-se que as trajetórias possíveis do móvel coincidem com os raios da onda associada. Graças à identidade do princípio de Fermat com o de mínima ação, o problema dinâmico encontra-se reduzido ao estudo de uma propagação de ondas senoidais.

De acordo com (21), para obter a equação de propagação da onda associada em um determinado campo, devemos, na equação (1) substituir $\frac{1}{V}$ por $\frac{g(x,y,z,W)}{h\nu}$.

Nós obtemos assim, conforme adotemos a mecânica de Einstein ou a de Newton:

$$\Delta u + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2} [(W - F)^2 - m_0^2 c^4] u = 0, \quad (24)$$

ou

$$\Delta u + \frac{8\pi^2}{h^2} m_0 [E - F] u = 0. \quad (24')$$

Note-se que a velocidade de propagação depende da frequência ν (pelo intermédio da energia); há dispersão. Veremos mais adiante que, em última análise, a verdadeira equação de propagação não é do tipo (1), mas de um tipo mais complicado.

Vamos verificar ⁽¹⁾³⁹ que as mecânicas geométricas derivam de (24) ou de (24') sob as mesmas restrições com que a ótica geométrica deriva de (1). Escrevamos a solução senoidal sob a forma (3), colocando:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{h} S(x, y, z). \quad (25)$$

Substituindo em (24) ou (24') e assumindo as derivadas segundas de φ pequenas em comparação com a soma

dos quadrados das derivadas primeiras, chegamos a uma das relações:

$$\sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{(W - F)^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2m_0} \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + F = E. \quad (26')$$

(26') é a equação clássica de Jacobi para campos constantes; (26) é a forma relativista. S é a função de ação, e a onda pode ser escrita na forma análoga a (12):

$$u(x, y, z, t) = C \cos \frac{2\pi}{h} [Wt - S]. \quad (27)$$

É interessante notar que a condição relativa às derivadas de φ sempre seria cumprida se se pudesse supor h infinitamente pequeno, porque as derivadas segundas de φ são proporcionais a $1/h$, enquanto o quadrado das derivadas primeiras o é a $1/h^2$. Concluiremos disso que a mecânica ondulatória se confunde com as antigas mecânicas quando h tende para zero, resultado que se esperava a priori.

Indicaremos agora um procedimento formal que permite remontar das equações (26) ou (26') às equações de propagação (24) ou (24'), processo cuja importância aparecerá posteriormente. Sabe-se que as derivadas de S em relação às coordenadas são os momentos de Lagrange conjugados; se, em (26) ou (26'), substituirmos $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$ por p_x, p_y, p_z , obtemos a equação da energia que podemos escrever:

$$f(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = 0. \quad (28)$$

Na função f , substituirmos respectivamente p_x, p_y, p_z , pelos símbolos $K \frac{\partial}{\partial x}, K \frac{\partial}{\partial y}, K \frac{\partial}{\partial z}$ com a notação

$$K = \frac{h}{2\pi i}. \quad (29)$$

Obtém-se um operador. Se aplicarmos este operador à função u , igualando o resultado a zero, obtemos as equações (24) e (24'). Por exemplo, partamos de (26'); procedendo como acabamos de indicar, obtemos o operador:

$$\frac{1}{2m_0} K^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + F - E$$

e, igualando a zero o resultado da operação realizada em u , chega-se bem a (24').

Da mesma forma, (26) leva a (24).

9. A observação capital de Schrödinger⁽¹⁾⁴⁰. – As teorias quânticas têm como principal campo de aplicação o mundo atômico. Admitindo minha concepção da mecânica, Schrödinger se perguntou se, precisamente

³⁹ (1) Cf. LÉON BRILLOUIN, C. R., t. **183** (1926), p. 2 10. – G. WENTZEL, *Zts. f. Phys.*, t. (1926), p. 518. Nota dos tradutores: Colocamos nas referências bibliográficas os artigos publicados por Léon Brillouin em 1926. É possível que Louis de Broglie tenha se equivocado nesta referência. Léon Brillouin publicou 4 artigos em 1926 e os dois que podem ter sido lidos por De Broglie se referem à mecânica ondulatória de Schrödinger, podendo ser localizados na *Comptes Rendus*.

⁴⁰ (1) B, p. 49 e seguintes.

na escala atômica, a propagação da onda associada poderia ser estudada pelos métodos da ótica geométrica. Ora, não é o caso, e eis como se pode constatá-lo. Até agora, aplicaram-se ao átomo os métodos das mecânicas geométricas, juntando-lhes as condições de quanta sobre as quais voltaremos. Ao proceder assim, prevê-se a existência de trajetórias contidas no domínio atômico; se, portanto, admite-se a natureza essencialmente ondulatória da dinâmica, o uso dos métodos antigos não é justificado quando o comprimento de onda da onda associada a um elétron intra-atômico é da ordem das dimensões do átomo. Ora, as fórmulas (13), (21) e (19') nos dão (as correções da relatividade sendo aqui insignificantes):

$$\lambda = \frac{h}{g} = \frac{h}{m_0 v}. \quad (30)$$

Como o quociente h/m_0 é da ordem da unidade, λ é da ordem de v^{-1} e verifica-se facilmente, com a ajuda das equações de Bohr, que λ é comparável às dimensões do átomo. Portanto, é lógico concluir que a dinâmica atômica não pode usar as equações de Lagrange-Hamilton cujo uso é legítimo na mecânica comum e a fortiori na mecânica celeste; ela deve estudar diretamente as soluções das equações rigorosas (24) e (24'). Esta observação capital de Schrödinger termina de fixar o caráter da nova mecânica.

10. O ponto material. — Voltemos ao caso em que as equações (26) ou (26') são válidas. Os raios da onda associada são trajetórias possíveis do móvel. Mas, em dado movimento, há um desses raios que possui uma importância física particular; é aquele que é efetivamente descrito pelo móvel. A onda associada, tal como a concebemos até agora, não permite compreender o que distingue este raio dos outros. Para conseguir vislumbrá-lo, é preciso, como eu assinalei em minha tese ⁽²⁾⁴¹, considerar não uma onda associada monocromática, mas um grupo de ondas associadas de frequências muito próximas.

Pode-se então conceber que a amplitude resultante apresente, num ponto, um máximo muito pronunciado; este máximo seria o ponto material. Este modo de ver é provado pelo fato seguinte: segundo as antigas mecânicas, a velocidade do móvel é o inverso da derivada da função $g(x, y, z, W)$ das equações (20) e (20') em relação a W . Temos:

$$v = \left(\frac{\partial g}{\partial W} \right)^{-1} \quad (31)$$

e, de acordo com (21), isto é equivalente a

$$v = \left(\frac{\partial(\nu/V)}{\partial \nu} \right)^{-1}. \quad (32)$$

(17) nos mostra, então, que a velocidade do móvel coincide com a do grupo das ondas associadas.

Mas o que acontece se o fenômeno dinâmico evolui em um domínio da ordem do comprimento de onda, como é o caso para o átomo? Schrödinger ⁽³⁾⁴² pensa que então não se pode mais falar de ponto material descrevendo uma trajetória; ele dá como razão que a região onde a amplitude de um grupo é próxima do seu máximo tem necessariamente uma extensão de vários comprimentos de onda. O ponto material não seria mais pontual na escala do comprimento de onda e, no átomo, não se poderia falar da posição nem da órbita de um elétron. No entanto, um átomo cujas dimensões são da ordem de 10^{-8} cm pode absorver um quantum ultravioleta cujo comprimento de onda é mais de 1000 vezes maior (efeito fotoelétrico); isto me inclinaria antes a acreditar que a região de localização da energia deve ser pontual, mesmo na escala do comprimento de onda. Há aqui um problema difícil que encontraremos mais adiante sob diversas formas.

II. – ESTABILIDADE DE MOVIMENTOS EM CAMPOS CONSTANTES.

11. As antigas condições quânticas de estabilidade. — O estudo dos fenômenos de quanta obrigou os físicos a introduzirem na mecânica uma ideia que há muito tempo parecia extremamente estranha: entre a infinidade dos movimentos periódicos que um ponto material pode possuir em um campo constante, são estáveis apenas alguns movimentos privilegiados que formam uma sequência enumerável como a sequência de números inteiros.

A introdução da noção de ondas associadas preparou a solução deste enigma ⁽¹⁾⁴³. Se, de fato, supomos cumpridas as condições de aplicação da ótica geométrica, a onda associada pode ser expressa na forma (27) e, para que a função u seja bem determinada em qualquer ponto do espaço, é necessário que, ao longo de toda curva fechada C , tenhamos o seguinte:

$$\int_C dS = nh. \quad (n \text{ inteiro}) \quad (33)$$

Esta é a forma geral das condições dos quanta, estabelecida por Einstein em 1917 ⁽²⁾⁴⁴. O aparecimento do número inteiro nas fórmulas dinâmicas deixa de ser misterioso; torna-se tão natural como a sua intervenção na teoria das cordas vibratórias ou antenas de radio-telegrafia. Pode-se expressar (33) dizendo que todos os períodos cíclicos da integral de ação devem ser múltiplos da constante h .

Deve-se notar que a quantificação se apresenta sob uma forma bastante diferente, conforme se considere os períodos obtidos por variação de uma variável cíclica,

⁴² ⁽³⁾ B, p. 507–508.

⁴³ ⁽¹⁾ *Thèse*, ch. III.

⁴⁴ ⁽²⁾ Ber. deutsch. Phys. Ges., (1917), p. 82.

⁴¹ ⁽²⁾ *Thèse*, p. 16.

como um azimute, ou de uma variável não cíclica, como um raio vetor. Por exemplo, em um campo de atração central, a quantificação azimutal leva a uma condição da forma:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta = n_1 h, \quad (34)$$

enquanto a quantificação radial é expressa por:

$$2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\partial S}{\partial \rho} d\rho = n_2 h, \quad (35)$$

ρ_0 e ρ_1 sendo os valores de ρ que limitam a liberação do raio vetor (pontos de ramificação da função S) e que correspondem aos círculos nos quais a quantidade de movimento se anula.

As condições resumidas por (33) constituem a forma natural sob a qual a estabilidade quântica deve ser enunciada na linguagem da mecânica antiga, mas elas devem agora ser consideradas apenas como aproximações de valor limitado. Em particular, uma condição de quantificação radial tal como (35) *nunca* pode ser exata, porque, nos círculos de raios ρ_0 e ρ_1 , o comprimento de onda da onda associada é infinito segundo (30) e, conseqüentemente, na vizinhança destes círculos, a ótica geométrica certamente não é válida.

12. As novas condições de estabilidade. – A função u das equações (24) (24') deve, de acordo com sua natureza física, ser em toda parte uniforme e contínua, e deve ser zero no infinito. Portanto, é necessário procurar para quais valores das constantes W ou E as equações (24) ou (24') admitem tais soluções. É nesta forma que Schrödinger enuncia as condições de estabilidade válidas em todos os casos. Ele determina assim a energia dos movimentos ou melhor, a frequência das ondas estáveis ⁽¹⁾⁴⁵.

Vamos considerar em particular a equação (24'), que foi considerada apenas por Schrödinger. Eu digo: 1° que existe uma série de valores E para os quais (24') admite uma solução em toda parte uniforme e finita; 2° que as funções assim obtidas formam, em geral, um sistema de funções ortogonais.

Vamos colocar:

$$\mu = \frac{2\pi}{h^2} m_0 E, \quad \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} F(x, y, z) = R(x, y, z). \quad (36)$$

Se M designa o ponto de coordenadas xyz , (24') escreve-se:

$$\Delta u(M) + [4\pi\mu - R(M)]u(M) = 0. \quad (37)$$

Se $u(M)$ é em toda parte uniforme e contínua e é zero no infinito, pode-se reduzir a resolução da equação (37) à de uma equação integral homogênea do tipo de Fredholm:

$$u(M) = \mu \int K(M, P) u(P) dv_P, \quad (38)$$

onde $K(M, P)$ é um “núcleo” devidamente escolhido; dv_P designa um elemento de volume que contém o ponto P e a integral é estendida para todo o espaço. Sabe-se que uma equação integral semelhante admite soluções não nulas apenas para alguns valores da constante μ geral, a cada um desses valores particulares corresponde uma única função u_i . Os μ_i são as constantes fundamentais; os u_i , funções fundamentais das equações (37) e (38).

Resta-nos mostrar que as funções u_i são, em geral, ortogonais, isto é, satisfazem as relações:

$$\int u_i(P) u_j(P) dv_P = 0 \quad i \neq j. \quad (39)$$

Sendo as funções u_i e u_j soluções de (37) para os valores μ_i e μ_j da constante, pode-se facilmente deduzir a relação:

$$\begin{aligned} u_j \Delta u_i - u_i \Delta u_j &= \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \\ &= 4\pi (\mu_i - \mu_j) u_i u_j. \end{aligned} \quad (40)$$

Integrando em todo o espaço, obtém-se, uma vez que as integrais de superfícies são nulas no infinito:

$$(\mu_i - \mu_j) \int u_i(P) u_j(P) dv_P = 0, \quad (41)$$

e isto equivale a (39) se, para cada μ_i , corresponde uma única função u_i .

As funções u_i só são evidentemente definidas quando aproximadas a uma constante multiplicativa, pode-se normalizá-las escolhendo as constantes de modo a ter:

$$\int u_i^2(P) dv_P = 1, \quad (42)$$

para qualquer valor de i .

Não insistirei mais sobre essas generalidades ⁽²⁾⁴⁶. O que foi dito é suficiente para mostrar como o problema da quantificação se reduz à busca de certas constantes fundamentais. A determinação das funções fundamentais correspondentes apresenta um certo caráter arbitrário no caso em que várias dessas funções se relacionam com o mesmo valor μ_i . Estes são precisamente os casos em que, na linguagem matemática das antigas mecânicas, se dizia que havia “degenerescência”.

Schrödinger estudou alguns casos notáveis. Sem recorrer à teoria das equações integrais, determinou as constantes e as funções fundamentais pelo seguinte artifício: reduzir a equação de propagação estudada, a uma equação do tipo de Laplace:

$$(a_0 x + b_0) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_2 x + b_2) y = 0, \quad (43)$$

⁴⁵ ⁽¹⁾ A e B.

⁴⁶ ⁽²⁾ Para a teoria das equações integrais e funções fundamentais, pode-se consultar, por exemplo, as seguintes obras: GOURSAT, *Traité d'analyse*, t. 3, Gauthier Villars, édition de 1923. HEYWOOD et FRÉCHET, *L'équation de Fredholm et ses applications*, Hermann, édition de 1913.

equação cujas soluções são expressas por integrais tomadas ao longo de certas curvas no plano da variável complexa segundo um método clássico ⁽¹⁾⁴⁷. O estudo dessas soluções permite determinar as constantes e as funções buscadas.

Os resultados assim obtidos mereceriam por si só uma exposição. Para não alongar demasiado o presente trabalho, remeto o leitor aos bons trabalhos de Schrödinger, limitando-me a recordar os dois pontos seguintes:

1° No caso do *oscilador linear* ⁽²⁾⁴⁸ chega-se à fórmula, dos meios quanta [semi-inteiros], já deduzida por Heisenberg de sua mecânica quântica. Esta fórmula, sugerida pela experiência, estava em oposição com o antigo método de quantificação.

2° No caso do *átomo de hidrogênio* ⁽³⁾⁴⁹, se $E > 0$; todas as soluções são aceitáveis; os movimentos hiperbólicos não são quantificados. Se, ao contrário, $E < 0$, encontramos os níveis de energia da teoria de Bohr. Os μ_i , têm, portanto, aqui uma sequência discreta de valores negativos (espectro de linhas) e uma sequência contínua de valores positivos (espectro contínuo).

III. – EQUAÇÕES GERAIS DE PROPAGAÇÃO

13. Equação geral de propagação para o ponto material livre. – No caso de um ponto material livre, a equação de propagação da onda associada é, de acordo com (24'), substituindo W por $h\nu$.

$$\Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left[1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2} \right] u = 0. \quad (44)$$

Comparando com (5), vemos que o espaço apresenta, para a onda associada, o índice de refração:

$$n = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}. \quad (45)$$

Portanto, há dispersão e, como dissemos sobre os grupos de ondas, isso nos leva a pensar que a equação (44) é uma forma degenerada de uma equação mais geral como (15). Para encontrar esta equação, vamos primeiro lembrar como podemos ir da equação de energia na forma (28) para as equações de propagação (24) e (24'). Vamos aplicar o mesmo procedimento, mas tratando desta vez o tempo como uma variável análoga às variáveis do espaço, como quer a teoria da relatividade. Vamos então colocar:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ct = x_4. \quad (46)$$

A dinâmica da relatividade nos ensina que os momentos conjugados destas 4 variáveis são os componentes do impulso de Universo:

$$p_1 = g_x, \quad p_2 = g_y, \quad p_3 = g_z, \quad p_4 = \frac{W}{c}. \quad (47)$$

onde g são os componentes da quantidade de movimento, e W , a energia.

A equação de conservação de energia pode então ser escrita:

$$p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m_0^2 c^4 = 0. \quad (48)$$

Generalizando o método utilizado para (28), substituiremos, em (48), cada p_i por $K \frac{\partial}{\partial x_i}$, K que tem o valor (29), e, aplicando o operador obtido à função u que iguala o resultado a zero, obtemos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u = 0. \quad (49)$$

A equação (44) é a forma que toma (49) quando se considera apenas as ondas monocromáticas de frequência ν , mas (49), que é da forma (15), parece ser a equação geral de propagação de todas as ondas do grupo associado ao móvel de massa m_0 .

Num dado sistema de referência, o ponto material livre move-se em linha reta com uma velocidade constante v . Tomando a trajetória como eixo z , parece provável que o grupo de ondas associado possa ser representado pela função:

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z - vt) e^{2\pi i \nu \left[t - \frac{n}{c} z \right]}, \quad (50)$$

onde n tem o valor de (45). Substituamos em (49) e coloquemos:

$$x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_0 = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (51)$$

Encontramos as duas relações:

$$v = nc, \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = 0. \quad (53)$$

A equação (52) é verificada por si mesma porque, se n for substituído por v/c em (45), reencontramos a expressão da energia em função da velocidade. Quanto à equação (53), ela expressa que a função f é harmônica no sistema próprio do móvel, porque (51) é a transformação de Lorentz. Se o móvel possui em seu próprio sistema a simetria central, a função u , expressa com as variáveis x_0, y_0, z_0, t_0 , tem por parte real:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{C}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \cos 2\pi \nu_0 t_0. \quad (54)$$

com $\nu_0 = \nu \sqrt{1 - n^2}$. Com as variáveis x, y, z, t , a expressão do grupo de ondas seria então:

$$u(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - nct)^2}{1 - n^2}}} \cos 2\pi \nu \left[t - \frac{n}{c} z \right]. \quad (55)$$

⁴⁷ (1) Ver GOURSAT, *Traité d'analyse* t. 2, p. 400.

⁴⁸ (2) B. p. 514.

⁴⁹ (3) A, *passim*.

A solução (55) é diferente da que propus até agora ⁽¹⁾⁵⁰, mas parece melhor. Note que ela define o ponto material como uma singularidade *rigorosamente* pontual.

14. Caso do movimento de uma carga elétrica em um campo eletromagnético. – Seguindo o mesmo método, vamos buscar a equação geral de propagação das ondas associadas ao movimento de um ponto material de carga e num campo eletromagnético conhecido, isto é, dado em função das coordenadas e do tempo.

O campo é definido pelos componentes do potencial de Universo que resume o potencial escalar Ψ e o potencial vetor $\vec{a}$. Estes componentes são:

$$\varphi_1 = -\frac{a_x}{c}, \quad \varphi_2 = -\frac{a_y}{c}, \quad \varphi_3 = -\frac{a_z}{c}, \quad \varphi_4 = \frac{\Psi}{c}. \quad (56)$$

Entre os componentes de $\vec{\varphi}$ e aqueles do impulso de Universo, existe a relação invariante:

$$(p_4 - e\varphi_4)^2 - \sum_{123} (p_i - e\varphi_i)^2 = m_0^2 c^2. \quad (57)$$

Vamos substituir novamente cada p_i por $K \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ e levar em conta a relação de Lorentz entre os potenciais:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \text{div } \vec{a} = 0. \quad (58)$$

Disso vem:

$$K^2 \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \right] - 2K \frac{e\Psi}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} - 2K \frac{e}{c} \sum_{xyz} a_x \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{e^2}{c^2} (\Psi^2 - a^2) - m_0^2 c^2 \right] u = 0. \quad (59)$$

Esta equação provavelmente deve ser vista como regulando a propagação das ondas associadas ao movimento do elétron numa região onde os potenciais são conhecidos em função das coordenadas e do tempo; em termos exatos, as funções u que representam as ondas associadas seriam as partes reais de algumas soluções de (59). Deve-se notar, no entanto, que (59) contém termos imaginários (aqueles onde figura K) e isso pode levantar algumas objeções do ponto de vista físico.

Em qualquer caso, definindo em (59)

$$u = e^{\frac{2\pi i}{h} S},$$

encontramos bem a forma geral relativística da equação de Jacobi como primeira aproximação:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - e\Psi \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{e}{c} a_x \right)^2 = m_0^2 c^2. \quad (60)$$

Se os campos forem constantes, a equação (59) leva a resultados já conhecidos, pois pode-se então supor que u é periódica, de frequência constante ν .

Em um campo eletrostático ($\vec{a} = 0$), a equação (59) assume a forma (24) e o espaço onde reina o campo apresenta para a onda o índice:

$$n = \sqrt{\left(1 - \frac{e\Psi}{h\nu} \right)^2 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}. \quad (61)$$

Se houver um campo magnético e se a ótica geométrica for aplicável, podemos nos contentar com a equação (60); o índice de refração, num ponto M e numa direção que faz o ângulo θ com o potencial vetor, tem então como valor:

$$n = c \sqrt{\sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2} / \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{c}{h\nu} \left[\frac{ea \cos \theta}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{h\nu - e\Psi}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2 - \frac{e^2 a^2 \sin^2 \theta}{c^2}} \right]. \quad (62)$$

Como resultado da presença do potencial vetor, o espaço se comporta como anisotrópico e birrefringente ⁽¹⁾⁵¹.

15. Dinâmica dos sistemas. – A dinâmica dos sistemas de pontos materiais não parece apresentar, na nova mecânica, nenhuma dificuldade de princípio particular, quando a ótica geométrica é válida, pois então somos reconduzidos à equação de Jacobi e às mecânicas antigas.

Não é mais assim, se a ótica geométrica não for mais aplicável. Se, em cada grupo de ondas, ainda subsistir neste caso uma singularidade *pontual* merecedora do nome de ponto material, pode-se facilmente conceber que cada um dos grupos de ondas se propague segundo uma lei como (59) onde os coeficientes dependem da posição simultânea das singularidades nos outros grupos; mas se não há mais, neste tipo de movimento, pontos materiais bem definidos, a questão torna-se obscura. Schrödinger inclina-se para esta segunda opinião e, para fundamentar a dinâmica dos sistemas ⁽²⁾⁵², generaliza minha ideia de ondas de fase: ele associa ao movimento do conjunto de N móveis uma onda no espaço de $3N$ dimensões, imaginadas pelas teorias clássicas para representar, pelo deslocamento de um único ponto representativo, a evolução de todo o sistema. Esta onda associada ao sistema dos N pontos seria função de $3N$ coordenadas do espaço e do tempo.

Até agora, não pude aceitar este ponto de vista; para mim, as ondas associadas têm uma realidade física e devem expressar-se por funções das 3 coordenadas do espaço e a do tempo. Não posso insistir mais sobre esta questão delicada; vê-se, pelo que precede, que a dinâmica ondulatória dos sistemas ainda não parece solidamente constituída.

⁵⁰ ⁽¹⁾ Veja, em particular, *C. R.*, t. **180** (1925), p. 198.

⁵¹ ⁽¹⁾ *Thèse*, p. 39.

⁵² ⁽²⁾ B, em particular, p. 522 e seguintes.

IV. – CONEXÃO ENTRE A TEORIA DE HEISENBERG E O ELETROMAGNETISMO

16. A mecânica quântica de Heisenberg ⁽³⁾⁵³. – Há um ano, seguindo as profundas sugestões de Heisenberg, desenvolveu-se toda uma doutrina, chamada mecânica quântica, de aparência muito abstrata, que, graças aos trabalhos de Born, Jordan, Dirac, Pauli, L. Brillouin [48] etc. adquiriu uma forma matemática notável e fornece resultados interessantes.

Todas as informações que possuímos sobre o interior dos átomos nos são fornecidas pelo estudo dos espectros; partindo desta observação; Heisenberg considera imprudente falar das posições e velocidades dos elétrons intratômicos e prefere representar o estado do átomo por grandezas diretamente ligadas às frequências e intensidades espectrais observáveis. No lugar de cada coordenada q_l e de cada momento p_l incluídos na teoria de Bohr, introduz-se uma matriz de dupla entrada com aspecto de um determinante cujo termo geral seria

$$q_l^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t} \quad \text{ou} \quad p_l^{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t}, \quad (63)$$

com a convenção adicional que q_l^{ik} e p_l^{ik} são imaginários conjugados⁵⁴ de q_l^{ik} . As frequências ν_{ik} são as frequências de emissão do átomo que podem ser escritas na forma:

$$\nu_{ik} = \nu_i - \nu_k, \quad (64)$$

de acordo com a Lei Básica da Combinação de Ritz.

As quantidades q_l^{ik} são tais que os quadrados dos seus módulos:

$$|q_l^{ik}|^2 = q_l^{ik} \cdot q_l^{ik}, \quad (65)$$

sejam iguais às intensidades das linhas espectrais.

Para poder utilizar estas matrizes de números, é necessário conhecer as regras de cálculo que lhes são aplicáveis. Heisenberg, Born e Jordan mostraram que essas regras são as mesmas usadas pelos matemáticos para matrizes algébricas. A soma e a multiplicação destas matrizes⁽¹⁾⁵⁵ são definidas pelas fórmulas:

$$(a + b)^{ik} = a^{ik} + b^{ik}, \quad (66)$$

$$(a \cdot b)^{ik} = \sum_j a^{ij} \cdot b^{jk}. \quad (67)$$

De (67) resulta que, em um produto de matrizes, não se pode permutar a ordem dos fatores.

Para introduzir a constante de Planck na mecânica quântica, o postulado básico é que as matrizes p_l e q_l

satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} (p_l p_m - p_m p_l)^{ik} &= 0 \\ (q_l q_m - q_m q_l)^{ik} &= 0 \\ (p_l q_m - q_m p_l)^{ik} &= 0, \quad \text{se } l \neq m, \\ (p_l q_l - q_l p_l)^{ik} &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k. \\ \frac{h}{2\pi i} & \text{se } i = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (68)$$

Para determinar os p_l os q_l e os ν_{ik} , a mecânica quântica coloca as equações parecidas com as de Hamilton:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dq_l}{dt} \right)^{ik} &= 2\pi i \nu_{ik} q_l^{ik} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_l} \right)^{ik} \\ \left(\frac{dp_l}{dt} \right)^{ik} &= 2\pi i \nu_{ik} p_l^{ik} = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_l} \right)^{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (69)$$

No último membro destas equações, H designa uma função de matrizes que se expressa por meio das matrizes q_l e p_l da mesma forma que a energia usando coordenadas e momentos no problema clássico correspondente. Para a definição exata das funções de matrizes e suas derivadas, consultar as dissertações originais ou a exposição de Léon Brillouin ⁽²⁾⁵⁶.

Observarei que, de fato, as equações (69) foram aplicadas apenas ao movimento de um único móvel e que, neste caso, pareceu necessário, para obter resultados exatos, escolher para H a expressão da energia em coordenadas cartesianas retangulares (Dirac) ⁽³⁾⁵⁷.

Demonstra-se, na teoria de Heisenberg ⁽⁴⁾⁵⁸, que se f é uma função qualquer dos q_l e p_l , as relações (68) resultam nas seguintes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \right)^{ik} &= \frac{2\pi i}{h} (p_l f - f p_l)^{ik}; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \right)^{ik} &= \frac{2\pi i}{h} (f q_l - q_l f)^{ik}. \end{aligned} \quad (70)$$

Aplicando estas fórmulas à função H e substituindo em (69), colocamos as equações da mecânica quântica na forma:

$$\left. \begin{aligned} \nu^{ik} q_l^{ik} &= \frac{1}{h} (H q_l - q_l H)^{ik} \\ \nu^{ik} p_l^{ik} &= \frac{1}{h} (H p_l - p_l H)^{ik} \end{aligned} \right\}. \quad (71)$$

17. Interpretação de Schrödinger. – Por meio de uma notável transposição, Schrödinger ⁽¹⁾⁵⁹ conseguiu mostrar que as equações da teoria de Heisenberg se interpretam naturalmente na mecânica das ondas. Para isso, partiu da definição das funções “bem ordenadas”. Estas são funções onde é proibido mudar a ordem dos fatores: por exemplo, as expressões $xy + yx$ e $2xy$ são

⁵³ ⁽³⁾ Sobre a mecânica quântica, ver a exposição de Léon Brillouin, t. 7 (1926) p. 135. E você encontrará a bibliografia da questão.

⁵⁴ Nota dos tradutores: “...*sont imaginaires conjugués*...”. Ver p. 333, equação 63 no artigo original.

⁵⁵ ⁽¹⁾ L. BRILLOUIN, *loc. cit.*, p. 137.

⁵⁶ ⁽²⁾ p. 139 e seguintes.

⁵⁷ ⁽³⁾ DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, t. 110 (1926), p. 570 e seguintes.

⁵⁸ ⁽⁴⁾ Ver L. BRILLOUIN, *loc. cit.*, equações (35) e (39).

⁵⁹ ⁽¹⁾ C.

idênticas se consideradas como funções comuns, mas são diferentes como funções bem ordenadas.

Considere então uma função bem ordenada $F(q_l, p_l)$ de dois conjuntos de variáveis q_l e p_l , e suponhamos, além disso, que F é um polinômio inteiro em relação aos p_l . Se, em F , nós substituímos cada p_l pelo símbolo $K \frac{\delta}{\delta p_l}$ onde K tem o valor (29), obtemos um operador; este é um procedimento que já usamos mais de uma vez. Vamos designar pela notação $[F, u]$ o resultado da operação realizada sobre uma função u das variáveis q_l . Por fim, suponhamos que conhecemos um conjunto de funções u_i normais e ortogonais, isto é, satisfatórias para as equações (40) e (42). Schrödinger define como componentes da matriz correspondente à função bem ordenada $F(q_l, p_l)$ as quantidades:

$$F^{ik} = \int u_i(P) [F, u_k(P)] dv_p, \quad (72)$$

a integral sendo estendida para todo o espaço, e mostra que os F^{ik} verificam as regras de cálculo (66–67).

Se considerarmos, em particular, as funções $F = q_l$ e $F = p_l$, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} q_l^{ik} &= \int u_i(P) u_k(P) q_l dv_p \\ p_l^{ik} &= \int u_i(P) K \frac{\partial}{\partial q_l} u_k(P) dv_p \end{aligned} \right\}. \quad (73)$$

Verifica-se facilmente que com estas definições, as relações (68) estão satisfeitas. As equações (69) tomam então a forma que devemos satisfazer. Para isso, temos apenas um meio: escolher adequadamente o sistema de funções u_i até agora arbitrário. Escolheremos o sistema das funções fundamentais da equação (24'), ou, *o que equivale ao mesmo*, da equação

$$[H, u] - Eu = 0, \quad (74)$$

onde H é a expressão da energia em coordenadas cartesianas retangulares, que é bem um polinômio em p_l .

As equações (71) são então satisfeitas. Basta verificá-las para a primeira. Temos:

$$\begin{aligned} H^{ik} &= \int u_i(P) [H u_k(P)] dv_p = E_k \int u_i(P) u_k(P) dv_p \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k. \\ E_k & \text{se } i = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (75)$$

H é, portanto, uma matriz diagonal cujos termos diagonais são os E_k , resultados conhecidos da mecânica quântica. Deduz-se disso:

$$\begin{aligned} (H q_l - q_l H)^{ik} &= \sum_j H^{ij} q_l^{jk} - \sum_j q_l^{ij} H^{jk} \\ &= (E_i - E_k) q_l^{ik}. \end{aligned} \quad (76)$$

A equação (71) é então verificada se os ν_{ik} obedecem à lei das frequências de Bohr:

$$\nu_{ik} = \frac{1}{h} (E_i - E_k). \quad (77)$$

Podemos agora entender por que H deve ser expressa em coordenadas retangulares: se expressássemos H de outra forma, por exemplo em coordenadas cilíndricas ou polares, a equação (74) não seria mais idêntica à equação de propagação (24') e o método de Heisenberg não seria mais justificado.

Mais uma observação! A mecânica de Heisenberg corresponde à equação (24') da mecânica das ondas newtoniana e não à equação (24) da dinâmica relativística.

18. Significado das ν_{ik} e das q_l^{ik} – A característica essencial da teoria de Heisenberg é que os ν_{ik} são as frequências das linhas espectrais do átomo e que as quantidades $q_l^{ik} e^{2\pi \nu_{ik} t}$ estão ligadas às intensidades destas linhas e desempenham o papel do momento elétrico nas teorias clássicas.

A mecânica ondulatória pode explicar isso? No que diz respeito às frequências ν_{ik} , eu tive a ideia de considerá-las como frequências de batimento ⁽¹⁾⁶⁰. Eis como se poderia conceber a coisa, se a ótica geométrica fosse válida no átomo. Consideremos, para simplificar, o átomo de hidrogênio, e sejam dois movimentos do elétron estáveis no sentido de Bohr e com energias W_i e $W_k < W_i$. Segundo (27), as ondas associadas a estes dois movimentos teriam por expressões:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= A_i \cos \frac{2\pi}{h} (W_i t - S_i) \\ u_k &= A_k \cos \frac{2\pi}{h} (W_k t - S_k) \end{aligned} \right\}, \quad (78)$$

e, de acordo com (33), ao longo de uma curva fechada C qualquer situada na região onde se efetua o movimento, deve-se ter:

$$\int C dS_i = n_i h, \quad \int C dS_k = n_k h. \quad (79)$$

Suponhamos (voltaremos a este ponto) que no átomo, em um determinado instante, as ondas u_i e u_k coexistam. A sua sobreposição dará origem a uma batida cuja amplitude conterà o fator:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{h} \left[\frac{W_i - W_k}{2} t - \frac{S_i - S_k}{2} \right] \\ = \cos 2\pi \left[\frac{\nu_{ik} t}{2} - \frac{S_i - S_k}{2h} \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

O sinal do cosseno não importa, a batida terá a frequência ν_{ik} . Além disso, na curva C , $n_i - n_k$ máxima de amplitude e cada um deles descreve a curva com uma frequência:

$$\omega = \frac{\nu_{ik}}{n_i - n_k}, \quad (81)$$

como resulta de (79) e (80) ⁽²⁾⁶¹. Vemos, assim, aparecerem frequências mecânicas com um sentido físico e tais que as frequências espectrais são harmônicas delas.

⁶⁰ ⁽¹⁾ C. R., t. **179** (1924), p. 676. Veja também Schrödinger A, no final.

⁶¹ ⁽²⁾ O conjunto dos máximos gira na curva C e reproduz-se identicamente com a frequência ν_{ih} .

Refletindo sobre isso, vemos que a concepção anterior lança alguma luz sobre o papel dos harmônicos na teoria da correspondência. No entanto, não é satisfatória: em primeiro lugar, baseia-se na aplicação das soluções da ótica geométrica no interior do átomo, o que não é justificado; em segundo lugar, não explica de forma alguma o papel dos q_l^{ik} de Heisenberg definidos pela primeira das relações (73).

Para interpretar os q_l^{ik} como componentes do momento elétrico do átomo, Schrödinger ⁽¹⁾⁶² assumiu o estado ondulatório do átomo definido pela superposição das ondas estáveis na forma:

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_i a_i u_i(x, y, z) e^{2\pi i \nu_i t}, \quad (82)$$

e a densidade elétrica em um ponto do átomo, ligada ao estado ondulatório pela relação:

$$\rho = \Psi \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}, \quad (83)$$

$\bar{\Psi}$ sendo a função imaginária conjugada de Ψ . Assim teríamos:

$$\rho = 2\pi \sum a_i a_k u_i u_k (\nu_i - \nu_k) \sin 2\pi(\nu_i - \nu_k)t, \quad (84)$$

e, de acordo com (73), o momento elétrico do átomo teria como componente, na direção q_l :

$$\mathcal{M}_l = \int \rho q_l dv = 2\pi \sum a_i a_k (\nu_i - \nu_k) q_l^{ik} \sin 2\pi(\nu_i - \nu_k)t. \quad (85)$$

O papel dos q_l^{ik} seria assim explicado. Schrödinger reconhece, aliás, que esta interpretação se depara com objeções e é apenas um esboço.

Voltemos a um ponto importante. Parece natural admitir que a vibração interna do átomo, em um de seus estados estáveis, tem apenas a frequência ν_i correspondente a esse estado. Ora, as duas concepções que acabamos de expor têm em comum o fato de assumirem constantemente presentes no átomo as ondas correspondentes a todos os movimentos estáveis. Para explicar este aparente paradoxo, talvez se possa partir da observação de que um movimento é definido não por uma onda monocromática, mas por um grupo de ondas; quando todas as frequências são estáveis (caso do movimento livre, por exemplo), o grupo pode ser formado por ondas de frequências extremamente próximas, mas se houver uma série discreta de frequências estáveis rigorosamente definidas, não é o grupo forçado a dissociar e a conter toda a série de frequências ν_i que são muito separadas umas das outras?

19. Conclusão. – A interpretação das grandezas se relaciona com a questão muito mais geral de conectar as mecânicas ondulatórias com o eletromagnetismo ou,

melhor dizendo, de criar uma física geral do campo que contenha ao mesmo tempo o eletromagnetismo convenientemente modificado e a nova mecânica. Esta física do campo deverá explicar a natureza das ondas associadas, justificar as suas equações de propagação, desvelar o sentido profundo da constante h . Deverá também mostrar porque os grupos de ondas com singularidades que constituem a matéria se enquadram todos num pequeno número de tipos: o elétron, o próton, o quantum de luz ... Assim se entenderá por que a matéria é atômica. Ainda não chegamos a esse ponto, mas essas questões são agora importantes para os pesquisadores.

Manuscrito recebido em 5 de agosto de 1926.

Disponibilidade de Dados

Todos os materiais que fundamentam as análises e conclusões apresentadas neste manuscrito encontram-se integralmente disponíveis no próprio artigo, por meio das referências bibliográficas, citações e documentação explicitamente indicadas pelos autores. A pesquisa não envolveu a geração de conjuntos de dados experimentais, bases de dados originais, códigos computacionais ou outros materiais suplementares que exijam depósito em repositórios específicos. Desse modo, todas as evidências, fontes documentais e procedimentos metodológicos necessários para a compreensão, verificação e reprodutibilidade acadêmica do estudo são de acesso público e estão devidamente identificados e referenciados no texto, em conformidade com os princípios da Ciência Aberta, da transparência científica e das diretrizes editoriais para disponibilização de dados de pesquisa.

Referências

- [1] L. Broglie, J. Phys. le Radium **7**, 321 (1926).
- [2] A. Vila Valls, Cah. François Viète **II**, 33 (2011).
- [3] M. Planck, *Autobiografia científica e outros ensaios* (Editora Contraponto, Rio de Janeiro, 2012).
- [4] N. Abbagnano, *Dicionário de Filosofia* (WMF Martins Fontes, São Paulo, 2012).
- [5] R.A. Martins e P.S. Rosa, *História da Teoria Quântica: A Dualidade Onda-Partícula, de Einstein a De Broglie* (Livraria da Física, São Paulo, 2014).
- [6] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [7] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 180 (1952).
- [8] G. Lochak, *Louis de Broglie – Un prince de la science* (Flammarion, Paris, 1992).
- [9] A. Georges, *Louis de Broglie, physicien et penseur* (Éditions Albin Michel, Paris, 1952).
- [10] R.A. Martins, *Erwin Schrödinger e a criação da Mecânica Ondulatória – Raízes Intelectuais, Contexto Histórico e Desenvolvimento Científico* (LF Editorial, São Paulo, 2025).
- [11] R.A. Martins, Revista Brasileira de Ensino de Física **47** Suppl 3, e20250263 (2026).
- [12] E. Schrödinger, Z. Physik **12**, 13 (1923).

⁶² ⁽¹⁾ C, p. 755.

- [13] H. Weyl, *Raum. Zeit. Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* (Julius Springer, Berlin, 1918).
- [14] J. Mehra e H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory: Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics, parte 1, Schrödinger in Vienna and Zurich (1887-1925)* (Springer-Verlag, New York, 1987), v. 5.
- [15] E. Schrödinger, *Annalen der Physik* **384**, 361 (1926).
- [16] E. Schrödinger, *Physical Review* **28**, 1049 (1926).
- [17] A. Pais, *Sutil é o Senhor...: A Ciência e a Vida de Albert Einstein* (Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1995).
- [18] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1966).
- [19] O. Darrigol, *From c-Numbers to q-Numbers: The Classical Analogy in the History of Quantum Theory* (University of California Press, Berkeley, 1992).
- [20] L. Brillouin, *Journal de Physique et le Radium* **7**, 353 (1926).
- [21] W. Heisenberg, *Philosophical Problems of Quantum Physics* (Ox Bow Press, Connecticut, 1979).
- [22] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge* (John Wiley & Sons, New York, 1958).
- [23] P.S. Rosa, *Louis de Broglie e as ondas de matéria*. Dissertação de Mestrados, Universidade Estadual de Campinas, Campinas (2004).
- [24] W. Heisenberg, *Física e Filosofia* (Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1999), 4 ed.
- [25] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy – The Revolution in Modern Physics* (Harper & Row, Publishers, New York, 1958).
- [26] L. Broglie, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **179**, 39 (1924).
- [27] L. Broglie, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **179**, 676 (1924).
- [28] J.R. Nielsen, *Niels Bohr – Collected Works (1918–1923)* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976).
- [29] N. Bohr, *Fysisk Tidsskrift* **12**, 97 (1914).
- [30] H. Radder, *Br. J. Philos. Sci.* **42**, 195 (1991).
- [31] L. Brillouin, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **178**, 1696 (1924).
- [32] L. Broglie, *Comptes Rendus l’Académie des Sci. Paris* **177**, 507 (1923).
- [33] W. Heisenberg, *Zeitschrift für Phys.* **33**, 879 (1925).
- [34] W. Heisenberg, in: *Classics of Science: Sources of Quantum Mechanics* (North-Holland Publishing, Amsterdam, 1967), v. 5.
- [35] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **110**, 570 (1926).
- [36] R. Jastrow, *Phys. Rev.* **73**, 60 (1948).
- [37] P.A.M. Dirac, *Proc. A* **112**, 661 (1926).