

Por que a base de uma mola Slinky em queda fica em repouso?

Why does the bottom of a falling Slinky stay at rest?

Matheus Rodrigues de Melo¹, Paulo Peixoto^{*1}

¹Universidade Federal de Pernambuco, Núcleo de Formação Docente, Caruaru, PE, Brasil.

Recebido em 20 de setembro de 2023. Aceito em 05 de novembro de 2023.

Neste artigo, analisamos o movimento de uma mola Slinky em queda, a partir do repouso, inicialmente suspensa em uma de suas extremidades. É bem conhecido que, nessas condições, a Slinky se move de forma inusitada: sua extremidade inferior fica em repouso até a chegada da extremidade superior – como se a gravidade estivesse sendo desafiada! Fizemos uma revisão da literatura, e identificamos que a explicação mais amplamente divulgada para esse fenômeno de levitação aparente da base da Slinky em queda faz uso do conceito de informação (e parece não agradar a muitos). Mostramos que tal fenômeno pode ser explicado – e reproduzido através de uma simulação computacional, com um modelo simples – sem a ideia de que “leva um tempo para a informação de que a Slinky foi solta, em sua extremidade superior, chegar à extremidade inferior”.

Palavras-chave: Slinky em queda, modelagem, simulação computacional.

In this paper, we analyze the motion of a falling Slinky, starting from rest and initially suspended from one of its ends. It is well-known that under these conditions, the Slinky moves in an unusual way: its lower end remains at rest until the upper end collides with it – as if gravity were being challenged! We conducted a literature review and identified that the most widely disseminated explanation for this levitation phenomenon of the Slinky’s base during the Slinky’s fall relies on the concept of information (and does not seem to please many). We show that such a phenomenon can be explained – and reproduced through a computer simulation using a simple model – without the notion that “there is a finite time for the information that the Slinky was released at its top to reach its bottom”.

Keywords: Falling Slinky, modeling, computer simulation.

1. Introdução e revisão da literatura

A Slinky (Fig. 1) é um tipo de mola de extensão pré-tensionada,¹ geralmente vendida como um brinquedo. Aqui no Brasil ela é mais conhecida como *mola maluca*. Foi inventada acidentalmente pelo engenheiro mecânico americano Richard James em 1943, nomeada por sua esposa, Betty James, em 1944 (o adjetivo “slinky” significa, informalmente, e em tradução livre, “gracioso e sinuoso em movimento ou contorno”), e produzida por ambos, através da recém criada James Industries, em 1945 – ano em que esse brinquedo chegou às prateleiras das lojas. A história é contada por Rachael Lallensack em um artigo publicado em 29 de agosto de 2019, na seção de Inovação da revista estadunidense Smithsonian [1]. Esse brinquedo é, até hoje, muito popular, e

realiza uma série de movimentos curiosos.² Deles, o que nos interessa aqui é o movimento de uma Slinky em queda, a partir do repouso, inicialmente suspensa em uma de suas extremidades. Tal movimento é ilustrado na Fig. 2, que apresenta imagens extraídas de um vídeo no YouTube [2], publicado em junho de 2012. Na primeira imagem (Fig. 2a), o homem está na iminência de soltar a Slinky. As imagens seguintes mostram a Slinky em queda, e a linha branca horizontal (inserida por nós na figura) realça que a extremidade inferior da Slinky não se move (ao menos não apreciavelmente), antes da chegada da extremidade superior – algo que chama a atenção, no vídeo em câmera lenta! [2] Como se a gravidade estivesse sendo desafiada! Isso dura menos de meio segundo, com uma Slinky típica [2].

Mas por que ocorre esse fenômeno de “levitação” (aparente) da parte inferior de uma Slinky em queda? No próprio vídeo [2] é apresentada uma explicação, pelo professor de física Michael Wheatland [3], da Universidade de Sydney (The University of Sydney),

*Endereço de correspondência: phrpeixoto@yahoo.com.br

¹ Uma *mola de extensão* típica pode ser estendida, mas não comprimida, por estarem, as espiras adjacentes, em contato entre si. Distingue-se, portanto, das *molasses de compressão*, que são as molasses usuais nos livros de física (e que podem ser comprimidas e estendidas). Uma mola de extensão *pré-tensionada* é fabricada de tal forma que duas voltas adjacentes em contato estão pressionadas uma contra a outra, sem a ação de uma força externa.

² No artigo de Lallensack [1] há um vídeo incorporado com um comercial da Slinky na TV americana, veiculado na década de 1960. Link para o vídeo no YouTube (acessado em março de 2023): <https://youtu.be/EZL6RGkPjws>



Figura 1: Fotografia de uma Slinky metálica. (Fonte: Roger McLassus, Wikimedia Commons. Link para o arquivo compartilhado (acessado em março de 2023): https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2006-02-04_Metal_spiral.jpg)

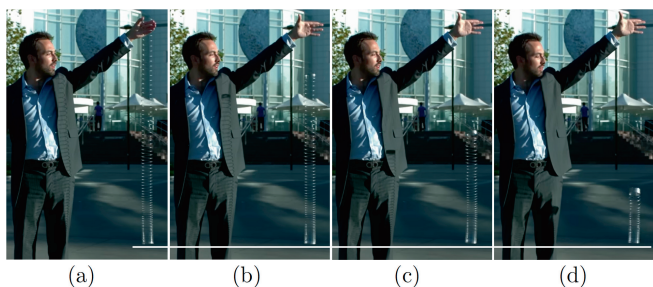


Figura 2: Imagens de uma Slinky em queda, extraídas de um vídeo no YouTube (<https://youtu.be/uiyMuHuCFo4>, acessado em março de 2023).

na Austrália: ele diz (em tradução livre) que *leva um tempo para a “informação” de que a Slinky foi solta, em sua extremidade superior, chegar à extremidade inferior*. O entrevistador parece não ficar satisfeito, e diz que muitas pessoas na internet se sentem desconfortáveis com o termo “informação”. O professor então faz uso do termo “sinal”, no lugar de “informação”, mas a ideia básica permanece a mesma: *qualquer alteração realizada em uma parte de um sistema físico leva algum tempo para produzir um efeito em outra parte desse sistema* (o que está de acordo com a teoria da relatividade). Como diz Wheatland, isso se aplica mesmo com uma barra rígida de aço no lugar da Slinky, mas, neste caso, o tempo para a propagação da informação (ou do sinal) é consideravelmente menor, e a barra parece começar a cair por inteiro, instantaneamente, logo que abandonada em sua extremidade superior. Considerando a explicação dada pelo professor Wheatland (que talvez não seja a mais satisfatória possível), observemos que *o que é peculiar, no caso da Slinky em queda, é que o sinal produzido ao se largar a Slinky, em sua extremidade superior, chega à extremidade inferior junto com o resto da mola*.

O mesmo canal do YouTube que publicou o vídeo com a explicação dada pelo professor Wheatland (o canal Veritasium, com 13,5 milhões de inscritos, em março de 2023) tem um vídeo, publicado antes (em setembro de 2011), em que o professor Rod Cross (também um

físico da Universidade de Sydney, mas aposentado desde 2003) solta uma Slinky e fala sobre o fenômeno [4]. Na parte inicial do vídeo, a queda da Slinky é exibida normalmente, não em câmera lenta, e, apesar de durar uma fração de segundo, é perceptível que a extremidade inferior não cai (ao menos não apreciavelmente) enquanto a extremidade superior não chega. Isso fica mais evidente, é claro, em câmera lenta, logo depois, no vídeo. O professor Cross apresenta uma explicação semelhante àquela que seria dada, em 2012, por seu colega Michael Wheatland [2], e, como ele, faz uso do termo “informação”. No final da apresentação, uma bola de tênis é presa à parte inferior da Slinky, e o vídeo é encerrado com uma pergunta: durante a queda da extremidade superior da Slinky, a bola de tênis cairá, subirá, ou permanecerá em seu lugar? Um outro vídeo do canal [5] apresenta a resposta: “a bola permanece em seu lugar” (em tradução livre). Mas permanece mesmo? Observe a Fig. 3, que apresenta imagens extraídas desse vídeo. As linhas brancas horizontais ajudam a visualizar que a bola cai: uma queda discreta, mas clara. (As linhas contínuas, nas Figs. 3a, 3b e 3c, destacam a posição da base da bola, enquanto as linhas cortadas, nas Figs. 3b e 3c, estão no mesmo nível da linha contínua na Fig. 3a.) Assistindo com atenção a essa parte do vídeo, você perceberá com clareza esse movimento de queda da bola – mesmo sem o auxílio dessas linhas que inserimos na Fig. 3 (use como referência, por exemplo, a ponta do sapato direito do professor Cross). Contudo, um pouco mais de atenção nos leva a observar, no vídeo, que a bola de tênis já estava se movendo lentamente para baixo antes de a extremidade superior da Slinky ter sido abandonada (ou seja, a base da Slinky não estava completamente em repouso, quando a extremidade superior foi abandonada). Então a resposta dada – que “a bola permanece em seu lugar” – é coerente com o experimento realizado.

Há algumas publicações relativas ao fenômeno da aparente levitação da extremidade inferior de uma

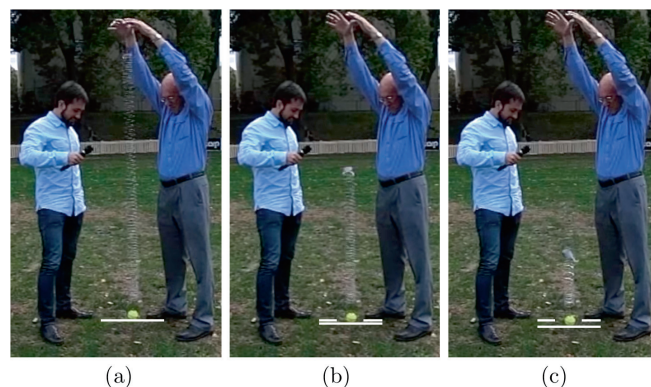


Figura 3: Imagens, extraídas de um vídeo no YouTube (<https://youtu.be/oKb2tCtpvNU>, acessado em março de 2023), de uma Slinky em queda, com uma bola de tênis presa à sua extremidade inferior.

Slinky em queda. Rod Cross e Michael Wheatland (dos vídeos citados acima) publicaram, em 2012, um artigo na prestigiosa *American Journal of Physics* [6] (o artigo de capa, do mês de dezembro, com uma figura apresentando quadros de um vídeo em câmera lenta em que Cross solta uma Slinky de plástico colorida).³ O texto traz desenvolvimentos matemáticos e simulações computacionais relativamente sofisticados (para um estudante de graduação no início de sua formação em física), resultando em um modelo semi-analítico em que houve ajuste a dados obtidos de vídeos de queda de duas molas reais do tipo Slinky, com propriedades distintas. Os autores concluem: “*The bottom of the slinky does not begin to fall until the top collides with it*” (“A extremidade inferior da Slinky não começa a cair até que a extremidade superior colida com ela”, em tradução livre). E afirmam: “*The physical explanation is straightforward: (...) a finite time is required for a wave front to propagate down the slinky communicating the release of the top*” (“A explicação física é direta: (...) um tempo finito é necessário para que uma frente de onda se propague pela Slinky, comunicando a liberação da extremidade superior”, em tradução livre). Mas, como dissemos acima, o que é peculiar, considerando essa explicação, é que o sinal produzido ao se largar a Slinky, em sua extremidade superior, chega à extremidade inferior junto com o resto da mola.

O trabalho de Cross e Wheatland [6] foi desenvolvido a partir do trabalho pioneiro de Melvin G. Calkin [7], publicado quase vinte anos antes na mesma revista. Cross e Wheatland modificaram o modelo de Calkin, fornecendo uma descrição aprimorada do colapso das voltas de uma Slinky em queda. A modificação foi a inclusão de um intervalo de tempo não nulo para o colapso das voltas, atrás da frente de onda produzida quando a extremidade superior da Slinky é abandonada. No modelo de Calkin (quem também é semi-analítico), a distribuição de massa de uma volta da Slinky colapsa instantaneamente, atrás da frente de onda. Veja os detalhes nesses artigos, se for de seu interesse (no artigo de Cross e Wheatland [6], observe, particularmente, a figura 4, e compare as figuras 5 e 7), mas isso não constitui um requisito para a compreensão deste texto. Queremos acrescentar, apenas, a informação de que o trabalho de Cross e Wheatland [6], apesar de seu avanço na modelagem do colapso das voltas da Slinky em queda (em comparação com o trabalho de Calkin [7]), não descreve tal colapso em detalhes (como os próprios autores afirmam, no artigo), e a constante elástica k da Slinky (para cada um dos dois modelos explorados – um de metal e outro de plástico) é um dos parâmetros livres

que foram ajustados a dados experimentais obtidos com uma câmera à taxa de 300 quadros por segundo.⁴

Há outros artigos em que – direta ou indiretamente – o movimento de uma Slinky em queda é analisado. Alguns foram publicados entre o trabalho de Calkin e o trabalho de Cross e Wheatland [8–11],⁵ e outros são mais recentes [13–17].⁶

Assim como nos trabalhos de Calkin [7] e Cross e Wheatland [6], no trabalho de Unruh [11] a Slinky é modelada, de forma relativamente sofisticada, como um *sistema contínuo* – ou seja, com uma distribuição contínua de massa. (Unruh fez uso do *formalismo lagrangeano* da mecânica clássica.) Já nos trabalhos de Plaut e colaboradores [14], Vanderbei [15] e Holcombe [16], a Slinky é modelada, também de forma relativamente sofisticada, como um *sistema discreto* de partículas conectadas por molas ideais (como na Fig. 4). No trabalho de Graham⁷ [8], a Slinky também é modelada como um sistema discreto, mas muito simples: com apenas duas partículas de mesma massa ligadas por uma mola de massa desprezível e comprimento de repouso nulo.⁸ Esse tipo de sistema (duas partículas verticalmente ligadas por uma mola, sob a ação de um campo gravitacional) foi recentemente estudado por Tort, Francisquini e Machado [17], que resolveram completamente as equações de movimento para as duas partículas, e consideraram massas não necessariamente iguais e um comprimento de repouso não nulo para a mola.

No trabalho de Silveira e Axt, publicado em 2005 na revista *Física na Escola* [9] – voltada, principalmente, a professores e estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio –, não é realizada uma modelagem de uma Slinky em queda (chamada por eles de *mola maluca*, que, como dissemos, é o nome usual aqui no Brasil), mas em um texto de apenas três páginas os autores apresentam uma explicação bastante acessível a estudantes do Ensino Médio com boa formação em mecânica newtoniana para o fenômeno de levitação aparente de sua base. É particularmente interessante observar que, em sua explicação, os autores não fazem

⁴ O valor obtido para k através de ajuste, para cada uma das duas molas usadas [6], foi comparado com valores obtidos através de medições de períodos de modos de oscilação, e os resultados foram considerados consistentes.

⁵ Em 2021, Unruh publicou no arXiv (acesse www.arxiv.org) uma segunda versão [12] do artigo publicado originalmente em 2011 [11].

⁶ Em todos esses trabalhos, o artigo pioneiro de Calkin [7] é citado – exceto no artigo de Silveira e Axt [9], que não apresenta referências.

⁷ O trabalho de Graham [8] foi realizado a partir de uma atividade didática proposta por Gardner no ano 2000 [18], na seção *Physics Trick of the Month* (Truque de Física do Mês), da revista *The Physics Teacher*.

⁸ É interessante observar que, em seu ótimo artigo de apenas duas páginas, Graham afirma que, com idealização e aproximação adequadas, o efeito de levitação da Slinky pode ser explicado com física ao nível *high school* (que corresponderia ao nosso Ensino Médio), mas o modelo envolve uma expansão da função cosseno em série de Taylor! Aqui no Brasil, nossos estudantes não veem séries de Taylor no Ensino Médio.

³ Um link para esse vídeo está na página <http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/slinky/> (acessada em março de 2023) – mais especificamente no tópico “High-speed movies of two real slinkies falling”.

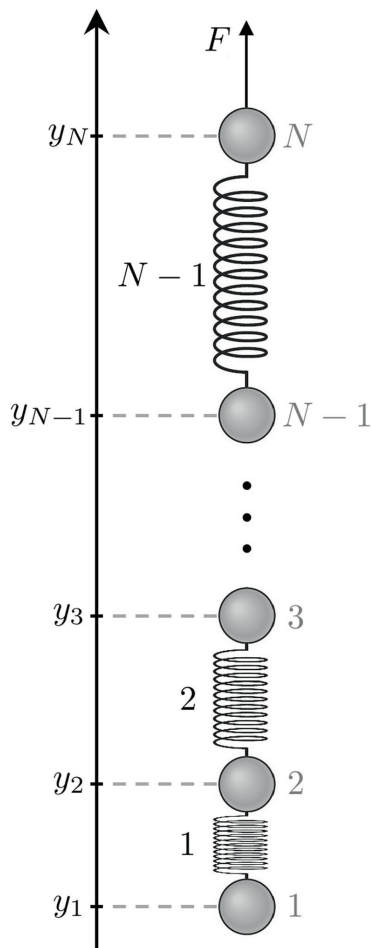


Figura 4: Sistema com N esferas de pequeno diâmetro e $N - 1$ molas de massa desprezível, inicialmente suspenso (em equilíbrio) pela aplicação de uma força F na esfera mais acima.

referência a “informação”, “sinal” etc. Contudo, o artigo dá mais atenção a outro aspecto da queda de uma Slinky: sua extremidade superior inicialmente se move para baixo com aceleração muito superior à da gravidade (como teria que ser, dado que a base fica praticamente em repouso e há mais massa na metade inferior da Slinky em queda que em sua metade superior).⁹ A atenção maior a esse aspecto é revelada já no título do artigo: “Podem molas em queda livre ter aceleração maior do que a da gravidade?”.

O trabalho de Aguirregabiria e colaboradores [10] é predominantemente voltado ao estudo de *barras elásticas* em queda (modeladas como um meio contínuo), em vez de molas em queda. Uma Slinky (chamada de “rainbow magic spring” no artigo) é usada como um *modelo experimental* para uma barra elástica, por permitir medições sem a necessidade de um aparato experimental muito sofisticado, já que os tempos característicos no caso de

uma Slinky em queda são muito maiores que no caso de uma barra elástica em queda. Mas os autores não se aprofundam na análise da Slinky.

Sakaguchi realiza, em seu trabalho [13], um estudo de *ondas de choque em osciladores harmônicos acoplados em queda* (um sistema do tipo ilustrado na Fig. 4). O autor faz uma breve referência ao problema da Slinky em queda, mas este não é o foco de sua análise. Diferentemente de uma Slinky em queda, em que as voltas vão se mantendo unidas à medida em que se encontram, no sistema de osciladores de Sakaguchi as partículas não se unem durante a queda; continuam oscilando (ligadas entre si por molas que têm um comprimento natural não nulo).

Para nós, autores deste texto, a pergunta mais relevante, considerando nosso interesse aqui, é: nesses estudos, o que é afirmado, relativamente ao movimento ou à ausência de movimento da base de uma Slinky, ou de um sistema similar, quando ela é verticalmente suspensa pelo topo e abandonada a partir de um estado de equilíbrio? A base se move imediatamente? Após algum tempo? Ou apenas com a chegada da extremidade superior?

Nos trabalhos em que a Slinky é modelada como um sistema contínuo [6, 7, 11, 12], os autores concluem (a partir da modelagem) que a base da Slinky só começa a se mover com a chegada da extremidade superior.

Nos trabalhos em que a Slinky é modelada, de forma relativamente sofisticada, como um sistema discreto [14–16], as conclusões não são exatamente as mesmas, como descreveremos a seguir.

Plaut e colaboradores [14] mostram que um sistema ideal como o da Fig. 4 se comporta de modo semelhante a uma Slinky em queda (considerando que as partículas colidem entre si de forma perfeitamente inelástica), mas concluem que *a partícula na extremidade inferior começa a se mover assim que a partícula na extremidade superior é abandonada, embora seja um movimento muito discreto*. Este é um resultado muito importante (que discutiremos em detalhes nas seções 2 e 3, ao nosso modo), porque ele nos diz que há um sistema ideal com comportamento semelhante ao de uma Slinky em queda – no sentido de a extremidade inferior ficar praticamente imóvel enquanto a extremidade superior não chega –, mas no qual a “informação” de que a extremidade superior foi abandonada chega à extremidade inferior instantaneamente! (É claro, segundo a teoria da relatividade isso não é possível, mas a mecânica newtoniana não impõe tal restrição.¹⁰) Talvez haja, então, uma fragilidade na explicação dada pelos professores Cross e Wheatland para a imobilidade da parte inferior de uma Slinky em queda: de que *leva um tempo para a informação de que*

⁹ De acordo com a segunda lei de Newton aplicada a um sistema de partículas, o centro de massa da Slinky cai com aceleração igual à da gravidade.

¹⁰ De todo modo, segundo a teoria da relatividade, basta que a informação de que a extremidade superior foi solta chegue à extremidade inferior não mais rapidamente que a luz. Estamos falando, considerando os comprimentos típicos de uma Slinky, de um intervalo de tempo da ordem de $1\text{ m}/(3 \times 10^8\text{ m/s}) \sim 10^{-8}\text{ s}$, que é nada, em termos práticos, no experimento em questão.

a Slinky foi solta, em sua extremidade superior, chegar (com o resto da mola!) à extremidade inferior. Afinal, há um sistema ideal como o da Fig. 4, estudado por Plaut e colaboradores [14], com comportamento muito semelhante ao de uma Slinky em queda, mas no qual a informação de que a extremidade superior foi solta chega à extremidade inferior instantaneamente (ou quase instantaneamente)!

Plaut e colaboradores [14] consideraram, em suas simulações de um sistema ideal como o da Fig. 4, apenas partículas de mesma massa. Escrevemos nossos próprios programas – nas linguagens C e Phyton – para a realização de simulações semelhantes, e incluímos o caso que corresponderia ao da Fig. 3: em que a massa da partícula mais abaixo é maior que a massa de cada uma das demais partículas. Apresentaremos na seção 3 os resultados das simulações que realizamos.

Vanderbei [15] também simulou o movimento de um sistema ideal como o da Fig. 4, mas – diferentemente de Plaut e colaboradores [14] – não identificou o movimento da partícula na extremidade inferior assim que a partícula na extremidade superior é abandonada. Pelo contrário, afirma que cada partícula do sistema permanece em repouso até que a partícula imediatamente acima colida com ela. Talvez a simulação realizada por Vanderbei não tenha revelado o movimento imediato da partícula na extremidade inferior (com a precisão usada) porque o sistema escolhido possui 500 partículas, que é um número bastante elevado, em comparação com os adotados por Plaut e colaboradores [14], que foram de apenas algumas unidades. É interessante observar que, de início, Vanderbei modela uma Slinky como um sistema discreto de partículas conectadas por molas ideais, mas depois toma um “*limite para o contínuo*” (fazendo o número de partículas tender a infinito, mas mantendo o comprimento inicial do sistema), chegando a uma solução para uma equação de onda. Uma curiosidade desse trabalho é que, como o próprio autor afirma, ele é destinado, principalmente, à comunidade de matemáticos, não de físicos. Vanderbei se graduou em *química*, fez mestrado em *pesquisa operacional e estatística* e também em *matemática aplicada*, e doutorado nesta última área. Atualmente é professor do Departamento de Pesquisa Operacional e Engenharia Financeira da Universidade de Princeton (Princeton University).

Holcombe também estudou o movimento de um sistema ideal como o da Fig. 4, mas através de cálculos analíticos – mais especificamente, pela análise de determinadas *somas trigonométricas finitas* [16] (confira no artigo). Identificou, como Plaut e colaboradores [14], que a partícula mais abaixo no sistema se move instantaneamente – embora lentamente – assim que a partícula na extremidade superior é abandonada. E observou que quanto maior o número de partículas no sistema, mais lento é esse movimento inicial da partícula mais abaixo. (Nas seções 2 e 3 chegaremos a essas mesmas conclusões, ao nosso modo.) Contudo, assim como Vanderbei [15], Holcombe tomou um *limite para o contínuo*, e concluiu

que nesse limite a base do sistema fica inicialmente em repouso.

O que estamos defendendo aqui – e que reforçaremos nas seções 2 e 3 – é que a imobilidade contraintuitiva da base de uma Slinky em queda pode ser explicada sem a ideia de que leva um tempo para a informação de que a extremidade superior da Slinky foi solta chegar à extremidade inferior.

2. Sistema ideal com N partículas e $N - 1$ molas em queda: análise teórica do movimento inicial (e um caso particular importante)

Nesta seção, analisaremos o movimento inicial de queda do sistema ideal ilustrado na Fig. 4. Consideraremos que todas as molas têm massa desprezível, obedecem à lei de Hooke e possuem a mesma constante elástica k . Em um primeiro momento, consideraremos também que todas as esferas possuem a mesma massa m , e concluiremos que esse movimento inicial é muito semelhante ao movimento inicial de uma Slinky em queda, mesmo com a “informação” de que a esfera mais acima foi solta chegando à esfera mais abaixo instantaneamente. Em seguida, discutiremos um caso particular importante, que corresponde ao modelo mais simples que encontramos na literatura para uma Slinky em queda, proposto por Graham [8]: duas partículas de mesma massa ligadas por uma mola de massa desprezível e comprimento de repouso nulo. Daí analisaremos uma versão modificada desse modelo, considerando a massa da partícula inferior maior que a massa da partícula superior, no intuito de adaptar o modelo de Graham à situação apresentada na Fig. 3, em que uma bola de tênis está presa à extremidade inferior da Slinky. Para esses modelos mais simples, faremos uso dos resultados analíticos obtidos por Tort, Francisquini e Machado [17].

Vamos começar considerando um sistema com 3 esferas de massa m e 2 molas de constante elástica k , como ilustrado na Fig. 5a. Na Fig. 5b estão os *diagramas de forças* para as três esferas, na situação de equilíbrio. Uma força $\mathbf{F}$, de módulo F , é aplicada à esfera mais acima – a esfera 3 –, mantendo o sistema em equilíbrio. Como a força resultante sobre a esfera 1 é nula, podemos concluir que a força elástica que a mola 1 exerce sobre ela tem módulo

$$F_{el1} = mg,$$

em que g é o módulo da aceleração da gravidade no local. Pela terceira lei de Newton (e lembrando que estamos considerando molas de massa desprezível), a mola 1 puxa a esfera 2 para baixo com uma força também de módulo F_{el1} . Uma análise similar para as esferas 2 e 3 nos leva a concluir que

$$F_{el2} = F_{el1} + mg = 2mg$$

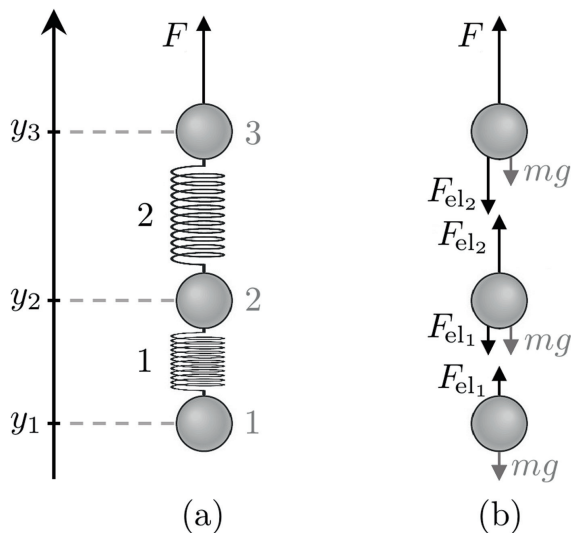


Figura 5: (a) Sistema com 3 pequenas esferas de massa m e 2 molas de massa desprezível, inicialmente suspenso (em equilíbrio) pela aplicação de uma força F na esfera mais acima. (b) Diagramas de forças para as três esferas, na situação de equilíbrio.

e

$$F = F_{\text{el}_2} + mg = 3mg.$$

No caso geral de N esferas e $N - 1$ molas (ilustrado na Fig. 4), a força elástica que a mola n exerce sobre a esfera n abaixo dela, na situação inicial de equilíbrio, tem módulo

$$F_{\text{el}_n} = nmg \quad (\text{com } n \in \{1, 2, \dots, N - 1\}). \quad (1)$$

Uma forma direta de obtermos este resultado é observando que, na situação de equilíbrio, a mola n está sustentando n esferas de massa m , cada (lembre-se que estamos considerando desprezíveis as massas das molas). Pela terceira lei de Newton, a mola n também exerce uma força de mesmo módulo sobre a esfera $n + 1$ acima dela.

Muito bem, voltemos ao sistema com 3 esferas e 2 molas, ilustrado na Fig. 5. Na situação inicial de equilíbrio, as três esferas estão em repouso. Assim que o sistema é abandonado, no instante $t = 0$ (fazendo-se $F = 0$), a força resultante sobre a esfera 3 passa de uma força nula para uma força vertical de módulo $F_{\text{el}_2} + mg = 3mg$, apontando para baixo, e, portanto, a esfera 3 acelera para baixo com o triplo do valor da aceleração da gravidade.¹¹ As esferas 1 e 2 estão em repouso, em $t = 0$, mas o que ocorre assim que a esfera 3 se move um pouco – mesmo que minimamente? A força elástica exercida pela mola 2 sobre a esfera

2 tem seu módulo diminuído (devido à diminuição da distensão da mola 2, pelo movimento da esfera 3), e, assim, surge imediatamente uma força resultante não nula sobre a esfera 2, apontando para baixo. Essa força resultante sobre a esfera 2, por sua vez, a move para baixo, causando uma redução na distensão da mola 1, o que leva à diminuição do módulo da força elástica exercida pela mola 1 sobre a esfera 1, e, assim, surge imediatamente uma força resultante não nula sobre a esfera 1, apontando para baixo, que a põe em movimento. Portanto, *assim que a esfera 3 se move, as esferas 2 e 1 também se movem*. Contudo, podemos antever que o deslocamento inicial sofrido pela esfera 2, em um pequeno intervalo de tempo Δt a partir de $t = 0$, é bem menor que o deslocamento sofrido pela esfera 3, no mesmo intervalo de tempo, observando que, nesse intervalo de tempo, a força resultante sobre a esfera 2 é sempre bem menor que a força resultante sobre a esfera 3 (veja a Fig. 5, com $F = 0$). Mesmo não incluindo no cálculo da força resultante sobre a esfera 2 a força elástica puxando-a para cima (de módulo F_{el_2} , exercida pela mola 2), a esfera 2 teria, inicialmente, apenas $2/3$ da aceleração da esfera 3 – já que os módulos das forças resultantes nas mesmas seriam, respectivamente, $2mg$ e $3mg$. Mas como o valor de F_{el_2} diminui gradualmente, a partir de $t = 0$, a aceleração da esfera 2 é, em um pequeno intervalo de tempo Δt , a partir de $t = 0$, bem menor que $2/3$ da aceleração da esfera 3. O resultado é que *a esfera 2 se move muito pouco, em comparação com a esfera 3*, nesse pequeno intervalo de tempo Δt a partir de $t = 0$ – o que faz com que a esfera 1 se mova ainda menos, já que a força elástica que a puxa para cima diminui muito pouco com um pequeno deslocamento para baixo da esfera 2.

Esta análise se estende a um número N maior de esferas, e a conclusão é que quanto mais abaixo estiver uma esfera no sistema ideal ilustrado na Fig. 4, menor será seu movimento inicial, em comparação com o movimento da esfera no topo (a esfera N na Fig. 4).

Temos, portanto, a previsão de que o movimento inicial do sistema ideal ilustrado na Fig. 4 é semelhante ao de uma Slinky em queda, mesmo com a “informação” de que a esfera mais acima foi solta chegando à esfera mais abaixo instantaneamente. Essa semelhança existe porque embora, no sistema ideal que estamos considerando, a esfera mais abaixo se mova assim que a esfera mais acima se move, tal movimento é muito discreto – e tão mais discreto quanto maior é o número total N de esferas.

Passemos agora ao caso particular que anunciamos no início desta seção: duas partículas (que podemos pensar como esferas de diâmetro desprezível) de mesma massa ligadas por uma mola de massa desprezível e comprimento de repouso nulo, e que obedece à lei de Hooke, sendo k sua constante elástica. Como pretendemos, em seguida, considerar a massa da partícula inferior maior que a massa da partícula superior, denotaremos a massa

¹¹ É interessante notar que esse resultado pode ser obtido observando-se que o centro de massa do sistema cai com aceleração de módulo g .

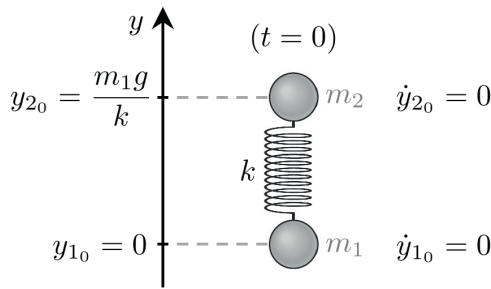


Figura 6: Sistema ideal com 2 esferas de diâmetro desprezível ligadas por uma mola de massa desprezível e comprimento de repouso nulo, aqui ilustrado para o instante $t = 0$: quando a esfera 2, inicialmente suspensa por uma força externa, é abandonada a partir do repouso.

da partícula inferior por m_1 e a da partícula superior por m_2 , e faremos $m_1 = m_2 = m$ apenas no resultado final. Este sistema está ilustrado na Fig. 6. Escolhemos o eixo y de modo que em $t = 0$ – que é o instante em que a partícula 2 é abandonada, a partir do repouso – a partícula 1, também em repouso, está na posição $y_{1_0} = 0$. A posição inicial da partícula 2, y_{2_0} , segue da condição de equilíbrio aplicada à partícula 1 (lembrando que estamos, como Graham [8], considerando uma mola ideal de comprimento de repouso nulo):

$$ky_{2_0} = m_1g.$$

Temos, portanto, as seguintes *condições iniciais*, ilustradas na Fig. 6:

$$y_{1_0} = 0, \quad (2)$$

$$y_{2_0} = \frac{m_1g}{k}, \quad (3)$$

$$\dot{y}_{1_0} = 0, \quad (4)$$

$$\dot{y}_{2_0} = 0, \quad (5)$$

com o uso da notação $\dot{y}$ para dy/dt , $\dot{y}_{1_0}$ para $(dy_1/dt)|_{t=0}$ e $\dot{y}_{2_0}$ para $(dy_2/dt)|_{t=0}$.

Aplicando a segunda lei de Newton a cada uma das partículas da Fig. 6, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais (verifique):

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -g + \frac{k}{m_1}(y_2 - y_1) \quad (6)$$

e

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -g - \frac{k}{m_2}(y_2 - y_1). \quad (7)$$

Um sistema de equações diferenciais equivalente, com as condições iniciais também equivalentes àsquelas em (2) a (5), foi resolvido por Tort, Francisquini e Machado [17].¹² Você pode verificar que a solução para este

problema de valor inicial (equações diferenciais (6) e (7), com as condições iniciais (2) a (5)) é:¹³

$$y_1(t) = \frac{\mu g}{k} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

e

$$y_2(t) = \frac{\mu g}{k} \left[1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} t \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2, \quad (9)$$

em que

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

é a chamada *massa reduzida* do sistema.¹⁴ Esta solução só é válida, contudo, de $t = 0$ ao instante t_{encontro} em que as partículas 1 e 2 se encontram. Fazendo $y_1(t_{\text{encontro}}) = y_2(t_{\text{encontro}})$, obtemos:

$$t_{\text{encontro}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu}{k}}. \quad (11)$$

O deslocamento (em módulo) sofrido pela esfera inferior, de $t = 0$ a $t = t_{\text{encontro}}$, que denotaremos por $|\Delta y_1|_{\text{max}}$, é:

$$|\Delta y_1|_{\text{max}} \equiv |y_1(t_{\text{encontro}}) - \overbrace{y_{1_0}}^0| = \left(\frac{\pi^2 - 8}{8} \right) \frac{\mu g}{k}, \quad (12)$$

como você pode verificar substituindo (11) em (8).

No caso particular em que $m_1 = m_2 \equiv m$, as igualdades (8) e (9) tornam-se, respectivamente (já que, neste caso, temos $\mu = m/2$):

$$y_1(t) = \frac{mg}{2k} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \quad (13)$$

e

$$y_2(t) = \frac{mg}{2k} \left[1 + \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2, \quad (14)$$

com $0 \leq t \leq t_{\text{encontro}}$, sendo

$$t_{\text{encontro}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}. \quad (15)$$

superior, em vez de a partícula inferior, e escolheram o ponto $y = 0$ coincidindo com a posição do centro de massa do sistema no instante $t = 0$. Além disso, estes autores consideraram que a mola possui um comprimento de repouso não necessariamente nulo.

¹³ Tal verificação não consiste na resolução do sistema, mas na constatação de que as funções em (8) e (9) satisfazem as igualdades (2) a (7).

¹⁴ O termo “massa reduzida”, comumente usado na física para uma quantidade como $\mu \equiv m_1m_2/(m_1 + m_2)$, é adequado porque μ tem dimensão de massa e é menor que m_1 e que m_2 . Chegamos a esta conclusão mostrando que $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$, e que, como $1/m_1$ e $1/m_2$ são termos positivos, $1/\mu$ é maior que qualquer um deles, e, portanto, μ é menor que m_1 e que m_2 .

¹² A diferença é que Tort, Francisquini e Machado orientaram o eixo y para baixo, consideraram a partícula 1 como a partícula

E o deslocamento sofrido pela esfera inferior, de $t = 0$ até o instante do encontro, neste caso particular de massas iguais, é:

$$|\Delta y_1|_{\max} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{8} \right) \frac{mg}{2k}. \quad (16)$$

Este resultado merece uma atenção especial. Como o comprimento inicial do sistema, no caso particular de massas iguais, é (veja a Fig. 6)

$$l_0 = \frac{mg}{k}, \quad (17)$$

podemos reescrever:

$$|\Delta y_1|_{\max} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{16} \right) l_0 \approx 0,12 l_0. \quad (18)$$

Assim, o deslocamento máximo sofrido pela partícula inferior do sistema ilustrado na Fig. 6 é apenas aproximadamente 12% do comprimento inicial desse sistema. (É claro, o comprimento inicial l_0 depende dos valores de m e k – veja a igualdade (17).) Isto significa que o modelo de Graham [8], apesar de muito simples, reproduz, em alguma medida, o comportamento de uma Slinky em queda – no sentido de a extremidade inferior ficar praticamente imóvel enquanto a extremidade superior não chega –, mesmo com a “informação” de que a extremidade superior foi abandonada chegando à extremidade inferior instantaneamente. (Você pode argumentar que o percentual de 12%, acima, é ainda alto, mas não dá pra esperar demais de um modelo tão simples como o de Graham [8].)

Vamos aplicar o modelo de Graham à Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6]. Trata-se de uma Slinky de massa $m_{\text{Slinky}} = 0,2155 \text{ kg}$ e comprimento $l_0 = 1,26 \text{ m}$, quando suspensa em uma de suas extremidades. A igualdade (18) nos dá, então, uma previsão de deslocamento da base da Slinky de aproximadamente 15 cm, do instante em que a extremidade superior é abandonada ao instante em que ela encontra a extremidade inferior. Trata-se de um deslocamento previsto elevado, comparado ao que se observa para tal Slinky, mas o modelo de Graham, mesmo muito simples, consegue prever que o deslocamento total da base do sistema é bem menor que o deslocamento total de seu topo. A Fig. 7 mostra os gráficos de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ (veja a Fig. 6), a partir de (13) e (14), de $t = 0$ ao instante do encontro, com $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $l_0 = 1,26 \text{ m}$ e $m/k = l_0/g$ (veja (17)). Observe que o movimento inicial da partícula inferior (até um pouco menos da metade do tempo total) é quase inexistente – embora a partícula inferior comece a se mover assim que a partícula superior se move. O tempo total, até o encontro das duas partículas, é de aproximadamente 0,4 s (0,398 s, para sermos mais precisos), e é consistente com o tempo correspondente no modelo de Cross e Wheatland [6], que é de aproximadamente 0,3 s.

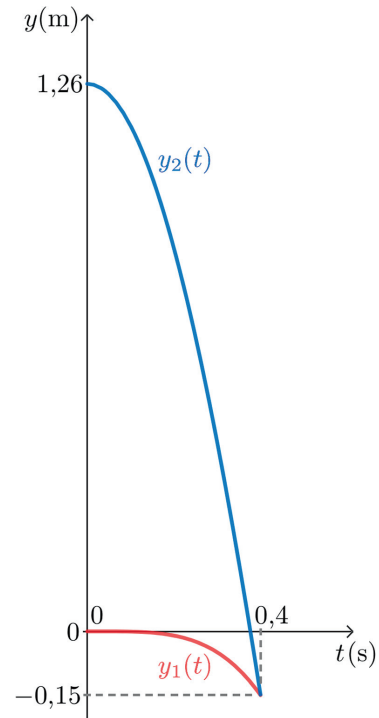


Figura 7: Posições das partículas 1 e 2 do sistema da Fig. 6, em função do tempo, com tal sistema modelando a Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6].

Na próxima seção veremos, através de uma simulação computacional, que quanto maior o número de partículas em um sistema como o da Fig. 4, modelando a Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6], menor o deslocamento sofrido por sua base (em módulo) até o colapso total da Slinky.

Podemos adaptar o modelo de Graham à situação apresentada na Fig. 3, em que uma bola de tênis está presa à extremidade inferior da Slinky. Para isso, basta considerarmos, inicialmente, que cada uma das duas partículas na Fig. 6 tem massa m que é metade da massa da Slinky – e assim a massa da Slinky é $m_{\text{Slinky}} = 2m$ –, e então mudarmos a massa da partícula inferior de m para $m + m_{\text{tênis}} = m_{\text{Slinky}}/2 + m_{\text{tênis}}$, em que $m_{\text{tênis}}$ é a massa da bola de tênis. Com isso, ficamos com

$$m_1 = m_{\text{Slinky}}/2 + m_{\text{tênis}} \quad \text{e} \quad m_2 = m_{\text{Slinky}}/2,$$

e a massa reduzida do sistema fica:

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_{\text{Slinky}}}{4} \left(\frac{m_{\text{Slinky}} + 2 m_{\text{tênis}}}{m_{\text{Slinky}} + m_{\text{tênis}}} \right). \quad (19)$$

Vamos calcular o deslocamento $|\Delta y_1|_{\max}$ sofrido pela esfera inferior do sistema da Fig. 6, de $t = 0$ até $t = t_{\text{encontro}}$, nestas novas condições. Substituindo (19) em (12), obtemos:

$$|\Delta y_1|_{\max} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{8} \right) \frac{m_{\text{Slinky}} g}{4k} \left(\frac{m_{\text{Slinky}} + 2 m_{\text{tênis}}}{m_{\text{Slinky}} + m_{\text{tênis}}} \right). \quad (20)$$

Uma bola de tênis tem massa de aproximadamente 58 gramas, e a Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6] tem massa de 215,5 gramas. Podemos obter a constante elástica k para a Slinky de Cross e Wheatland – modelada pelo sistema ilustrado na Fig. 6 – a partir da igualdade (17), com $m = m_{\text{Slinky}}/2$ e $l_0 = 1,26$ m. O resultado é, aproximadamente:

$$k = 0,838 \text{ N/m.} \quad (21)$$

Com isso a igualdade (20) nos dá

$$|\Delta y_1|_{\text{max}} \approx 17,8 \text{ cm,} \quad (22)$$

que é um deslocamento apenas um pouco maior que o deslocamento de aproximadamente 15 cm que esse modelo simples prevê sem a bola de tênis (14,7 cm, para termos mais precisos – com o uso da igualdade (16)). Assim, o que o modelo simplificado ilustrado na Fig. 6 nos diz é que prender uma bola de tênis à extremidade inferior de uma Slinky não altera significativamente o movimento dessa extremidade inferior, quando a extremidade superior é abandonada a partir do repouso, com o sistema em equilíbrio (veja a Fig. 3). Substituindo (19) e (21) em (11), obtemos $t_{\text{encontro}} \approx 0,438$ s, que é um pouco maior que o previsto por esse modelo simples para o caso em que não há a bola de tênis presa à Slinky (0,398 s).

Estes resultados analíticos foram úteis como um teste para os programas que escrevemos para a simulação do movimento de um sistema ideal com N partículas e $N-1$ molas em queda, ilustrado na Fig. 4.

3. Sistema ideal com N partículas e $N-1$ molas em queda: simulação computacional

Para simular o movimento de um sistema ideal com N partículas e $N-1$ molas em queda, ilustrado na Fig. 4, em primeiro lugar devemos especificar todas as aproximações que serão realizadas. Consideraremos que cada partícula é um *ponto material* – ou seja, tem massa (a ser determinada), mas extensão desprezível, podendo ser tratada, geometricamente, como um ponto. Consideraremos, também, molas de massa desprezível e comprimento de repouso nulo, que obedecem à lei de Hooke e possuem constante elástica k , cada (com valor a ser determinado, mais adiante). Ou seja, a mola n (com $1 \leq n \leq N-1$) exerce, sobre a partícula $n+1$ imediatamente acima, na posição y_{n+1} , e sobre a partícula n imediatamente abaixo dela, na posição y_n (veja a Fig. 4), forças de módulo¹⁵

$$F_{\text{el}_n} = k(y_{n+1} - y_n). \quad (23)$$

¹⁵ Se a mola n tivesse um comprimento de repouso não nulo L_n , a igualdade (23) seria modificada para $F_{\text{el}_n} = |k(y_{n+1} - y_n - L_n)|$.

A força resultante sobre a partícula n tem, portanto, componente y dada por (esteja atento, ou atenta, aos sinais)

$$(F_{\text{res}_n})_y = \begin{cases} -k(y_n - y_{n-1}) - m_n g & \text{se } n = N, \\ k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}) - m_n g & \text{se } 1 < n < N, \\ k(y_{n+1} - y_n) - m_n g & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (24)$$

Além disso, estamos supondo que as partículas colidem sequencialmente, de cima para baixo, e estamos considerando que cada colisão é perfeitamente inelástica – ou seja, duas partículas que colidem ficam unidas, após a colisão, tornando-se uma nova partícula. A velocidade inicial $\dot{y}_{(n,n-1)}$ da nova partícula formada pela colisão da partícula n , de massa m_n , com a partícula $n-1$, de massa m_{n-1} , é determinada pela conservação do momento linear:

$$\dot{y}_{(n,n-1)} = \frac{m_n \dot{y}_n + m_{n-1} \dot{y}_{n-1}}{m_n + m_{n-1}} \quad (1 < n \leq N), \quad (25)$$

em que $\dot{y}_n$ e $\dot{y}_{n-1}$ são, respectivamente, as velocidades das partículas n e $n-1$ imediatamente antes da colisão. E, é claro, a massa dessa nova partícula é

$$m_{(n,n-1)} = m_n + m_{n-1} \quad (1 < n \leq N). \quad (26)$$

Na simulação (lembrando que estamos supondo que as partículas colidem sequencialmente, de cima para baixo), podemos considerar que, imediatamente após a colisão da partícula n com a partícula $n-1$, a partícula n deixa de existir e a velocidade e a massa da partícula $n-1$ são “atualizadas”. Podemos denotar essas atualizações, na notação usual para algoritmos, escrevendo (lemos “←” como “recebe” ou “é atualizado para”):

$$\dot{y}_{n-1} \leftarrow \frac{m_n \dot{y}_n + m_{n-1} \dot{y}_{n-1}}{m_n + m_{n-1}} \quad (27)$$

e

$$m_{n-1} \leftarrow m_n + m_{n-1}. \quad (28)$$

(Um detalhe importante: a atualização da massa da partícula $n-1$, no programa, deve ocorrer *após* a atualização de sua velocidade, ou então a atualização da velocidade ocorrerá com um valor incorreto para m_{n-1} .) Como o número efetivo de partículas do sistema, N_{efetivo} , diminui em uma unidade a cada colisão, temos, a cada colisão, a seguinte atualização:

$$N_{\text{efetivo}} \leftarrow N_{\text{efetivo}} - 1, \quad (29)$$

com N_{efetivo} começando em N e terminando em 1 (após todas as colisões).

O próximo passo, para a realização da simulação, consiste na especificação das *condições iniciais* do

sistema – ou seja, na especificação das posições e velocidades das partículas para $t = 0$ (veja a Fig. 4). Como o sistema é abandonado, em $t = 0$, a partir do repouso, todas as velocidades iniciais são nulas. Temos, assim,

$$\dot{y}_{n_0} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (30)$$

com o uso da notação $\dot{y}_{n_0}$ para $(dy_n/dt)|_{t=0}$. A determinação das posições iniciais y_{n_0} é menos direta. Há dois sistemas físicos reais a serem modelados: uma Slinky (como na Fig. 2), e uma Slinky com uma bola de tênis presa à sua extremidade inferior (como na Fig. 3). No primeiro caso, cada uma das N partículas do sistema modelo ilustrado na Fig. 4 tem massa $m = m_{\text{Slinky}}/N$, em que m_{Slinky} é a massa da Slinky; ou seja,

$$m_n = m = m_{\text{Slinky}}/N, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (31)$$

No segundo caso, temos:

$$m_n = \begin{cases} m_{\text{Slinky}}/N, & \text{se } n = 2, 3, \dots, N, \\ m_{\text{Slinky}}/N + m_{\text{tênis}}, & \text{se } n = 1, \end{cases} \quad (32)$$

sendo $m_{\text{tênis}}$ a massa da bola de tênis. Voltando ao primeiro caso (sem a bola de tênis), a soma de todas as distensões das molas do sistema ilustrado na Fig. 4, na situação inicial de equilíbrio, é igual à extensão inicial l_0 da Slinky que ele modela, quando suspensa por uma de suas extremidades. Denotando a distensão da mola n por d_n , temos, em $t = 0$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} d_n = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N-1} = l_0.$$

Fazendo, na igualdade (1), $F_{\text{el}_n} = kd_n$, obtemos:

$$d_n = n \frac{mg}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (33)$$

Segue que

$$\sum_{n=1}^{N-1} n \frac{mg}{k} = l_0 \implies \underbrace{\frac{m_{\text{Slinky}}}{N}}_{\mathcal{N}} \frac{g}{k} \sum_{n=1}^{\overbrace{N-1}^{\mathcal{N}(N-1)/2}} n = l_0 \implies k = \frac{(N-1)m_{\text{Slinky}}g}{2l_0}. \quad (34)$$

Portanto, este é o valor de k que garante que a extensão inicial do sistema ilustrado na Fig. 4 é igual à extensão inicial l_0 da Slinky que ele modela. E é o valor a ser usado nas expressões para $(F_{\text{res}_n})_y$, em (24). Fazendo a posição inicial y_{1_0} da partícula 1 igual a zero, as posições iniciais das demais partículas são dadas por (veja a igualdade (33))

$$\begin{aligned} y_{n_0} &= d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d_i = \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{mg}{k} = \underbrace{\frac{m_{\text{Slinky}}}{N}}_{\mathcal{N}} \frac{g}{k} \sum_{i=1}^{\overbrace{n-1}^{n(n-1)/2}} i. \end{aligned}$$

Perceba que devido ao fator $(n-1)$ na expressão final, ela é válida também para $n = 1$ – ou seja, para a primeira partícula. Temos, então,

$$y_{n_0} = \frac{n(n-1)m_{\text{Slinky}}g}{2Nk}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (35)$$

Portanto, uma vez determinados a massa m_{Slinky} da Slinky, sua extensão inicial l_0 (quando suspensa em uma de suas extremidades, sem a bola de tênis), e o número N de partículas do sistema que a modela (veja a Fig. 4), as igualdades (34) e (35) determinam, respectivamente, a constante elástica k de cada mola do sistema e as posições iniciais de cada partícula do sistema. Podemos substituir (34) em (35), obtendo:

$$y_{n_0} = \frac{n}{N} \left(\frac{n-1}{N-1} \right) l_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (36)$$

Observe, a partir de (35) ou (36), que y_{n_0} varia com n por uma função polinomial do segundo grau. Fica claro, em (36), que $y_{n_0} = 0$ para $n = 1$ e $y_{n_0} = l_0$ para $n = N$.

Deixaremos como atividade para você mostrar que, no caso em que há uma bola de tênis presa à extremidade inferior da Slinky, as igualdades (35) e (36) mudam respectivamente para

$$y_{n_0} = \frac{(n-1)g}{k} \left(\frac{n m_{\text{Slinky}}}{2N} + m_{\text{tênis}} \right) \quad (37)$$

e

$$y_{n_0} = \left(\frac{n}{N} + \frac{2m_{\text{tênis}}}{m_{\text{Slinky}}} \right) \left(\frac{n-1}{N-1} \right) l_0, \quad (38)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots, N$. É claro, as igualdades (35) e (36) torna-se casos particulares das igualdades (37) e (38), respectivamente: ao fazermos, nestas últimas, $m_{\text{tênis}} = 0$, obtemos as primeiras. Esteja atento, ou atenta, ao seguinte: l_0 , em (38), é a extensão inicial da Slinky quando suspensa em uma de suas extremidades, *sem a bola de tênis*. De fato, a igualdade (38) nos diz que, para $n = N$, temos $y_{N_0} = y_{N_0} = l_0(m_{\text{Slinky}} + 2m_{\text{tênis}})/m_{\text{Slinky}}$, e, portanto, a extensão inicial do sistema com a bola de tênis, y_{N_0} , é maior que sua extensão inicial l_0 sem a bola de tênis pelo fator $(m_{\text{Slinky}} + 2m_{\text{tênis}})/m_{\text{Slinky}}$, que independe de N . Para a Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6] temos $m_{\text{Slinky}} = 0,2155 \text{ kg}$ e $l_0 = 1,26 \text{ m}$. Assim, com $m_{\text{tênis}} = 0,058 \text{ kg}$, obtemos $y_{N_0} = 1,94 \text{ m}$, aproximadamente.

Especificadas as condições iniciais (igualdades (30) e (37) (ou (38))), é preciso determinar como o sistema evoluirá com o tempo, na simulação. Em nossos programas, fizemos uso do método de Euler-Cromer. Nesse método, aplicado ao nosso sistema, o tempo avança de forma discreta em pequeníssimos intervalos de tempo δt , a partir de $t = 0$, e a cada passo temporal as acelerações, velocidades e posições das N partículas são assim atualizadas, nesta ordem:¹⁶

$$\ddot{y}_n \leftarrow \frac{(F_{\text{res}_n})_y}{m_n}, \quad (39)$$

¹⁶ Estamos usando a notação $\ddot{y}_n$ para d^2y_n/dt^2 .

$$\dot{y}_n \leftarrow \dot{y}_n + \ddot{y}_n \delta t, \quad (40)$$

$$y_n \leftarrow y_n + \dot{y}_n \delta t, \quad (41)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots, N$, e $(F_{\text{res},n})_y$ calculado segundo a igualdade (24), com k dado pela igualdade (34). Na atualização em (39), está sendo aplicada a segunda lei de Newton à partícula n . Na atualização em (40), estamos supondo que o intervalo de tempo δt é tão pequeno que podemos considerar que, nesse intervalo de tempo, a aceleração da partícula é praticamente constante. Fizemos, em nossos programas, $\delta t = 10^{-7}$ s, que é um valor bastante pequeno (veja a nota de rodapé número 10). Uma aceleração praticamente constante levaria à seguinte atualização na posição y_n da partícula n (lembre-se de seu estudo de movimentos com aceleração constante): $y_n \leftarrow y_n + \dot{y}_n \delta t + \ddot{y}_n (\delta t)^2 / 2$. Contudo, porque δt é muito pequeno, este último termo é desprezível (com $\delta t = 10^{-7}$ s, temos $(\delta t)^2 = 10^{-14}$ s²) – e daí a atualização em (41).

É necessária a especificação de um *critério de parada* para a simulação. Uma escolha mais ou menos óbvia é: continue avançando no tempo, de δt em δt , enquanto a posição y_2 da partícula 2 for maior que a posição y_1 da partícula 1.

A Fig. 8 apresenta nosso código base, em linguagem C (um outro código, em Python, foi escrito por Matheus R. de Melo). Dizemos “código base” porque fizemos algumas modificações neste código para a realização de cálculos mais específicos, que apresentaremos adiante. Os valores que podem ser modificados, a cada execução, são os de m_{Slinky} , $m_{\text{tênis}}$, l_0 e N . Para simularmos o movimento da Slinky sem a bola de tênis, basta fazermos $m_{\text{tênis}} = 0$. Na Fig. 8 temos $m_{\text{Slinky}} = 0,2155$ kg (que é a massa da Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6]), $m_{\text{tênis}} = 0,0580$ kg, $l_0 = 1,26$ m (que é a extensão da Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6], quando suspensa verticalmente em uma de suas extremidades, sem a bola de tênis) e $N = 6$. Fizemos $g = 9,8$ m/s².

O programa na Fig. 8 imprime no arquivo `tabela.dat` – a ser aberto por um programa à parte, gerador de gráficos a partir de um conjunto de dados – uma tabela com as colunas descritas a seguir.

A primeira coluna contém os valores de t relativos à simulação, em segundos. A segunda coluna contém os valores, em metros (como para as demais posições), da posição y_{CM} do centro de massa do sistema de N partículas, calculada a cada passo temporal a partir das posições y_n e das massas m_n através da fórmula

$$y_{\text{CM}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_{N_{\text{efetivo}}} y_{N_{\text{efetivo}}}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{N_{\text{efetivo}}}}, \quad (42)$$

em que N_{efetivo} é o número efetivo de partículas no sistema (que começa em N e termina em 1, diminuindo em uma unidade a cada colisão). A terceira coluna

```
//Programa: Slinky [setembro/2023]
//Atenção: valores que podem ser modificados: mS, mT, l0, N
#include<stdio.h>
#define mS 0.2155 //massa da Slinky (kg)
#define mT 0.0580 //massa da bola de tênis (kg)
#define l0 1.26 //comprimento da Slinky (m), verticalmente em equilíbrio
//sem a bola de tênis
#define g 9.8 //aceleração da gravidade (m/s^2)
#define Dt 1e-7 //Delta t (s)

main()
{
    FILE *arq;
    int n, N=6; //número inicial de partículas do sistema
    int Nef=N; //número efetivo de partículas do sistema (1<=Nef<=N)
    //a cada colisão, Nef diminui em 1 unidade)
    double m[N+1], y[N+1], vy[N+1]={0}, any, fny, t=0;
    //massas, posições, velocidades, acelerações, forças, tempo (no SI)
    double yN0; //posição inicial da partícula N (mais acima)
    double yCM, yCM0; //centro de massa e CM em t=0
    double k=(N-1)*mS*g/(2.0*l0); //constante elástica (N/m)

    m[1] = 1.0*mS/N + mT; //massa 1
    for(n=2;n<=N;n++) m[n]=1.0*mS/N; //massas 2 a N
    for(n=1;n<=N;n++) y[n]=(n-1)*g/k*(mS*(2.0*N+mT)); //posições iniciais
    yN0=y[N]; //guardando a posição inicial da partícula N (mais acima)

    arq = fopen("tabela.dat", "w");

    fprintf(arq, "t(s)\n"); //impressão de cabeçalho da tabela
    fprintf(arq, "\tyCM(m)\n");
    fprintf(arq, "\tyCMteo(m)\n");
    for(n=1;n<=N;n++) fprintf(arq, "\ty%d(m)\n", n);
    fprintf(arq, "\n");

    while(y[2]>y[1]){ //a cada execução deste loop, temos um avanço Dt no tempo
        yCM=0;
        for(n=1;n<=Nef;n++) yCM=yCM+m[n]*y[n]; //cálculo da posição do CM
        yCM=yCM/(mS+mT);
        if(t==0) yCM0=yCM; //posição do CM em t=0
        fprintf(arq, "%f", t);
        fprintf(arq, "\t%f", yCM);
        fprintf(arq, "\t%f", yCM0-1.0/2*g*t*t);
        for(n=1;n<=Nef;n++){ //varrendo todas as partículas do sistema
            fprintf(arq, "\t%.12f", y[n]);
            if(n==2 && n<=Nef-1) //determinação da força sobre a partícula n
                fny=k*(y[n+1]-y[n])-k*(y[n]-y[n-1])-m[n]*g;
            else if(n==1)
                fny=k*(y[n+1]-y[n])-m[n]*g;
            else if(n==Nef)
                fny=-1.0*k*(y[n]-y[n-1])-m[n]*g;
            any=fny/m[n]; //parte central do método de Euler-Cromer
            vy[n]=vy[n]+any*Dt; //parte central do método de Euler-Cromer
            y[n]=y[n]+vy[n]*Dt; //parte central do método de Euler-Cromer

            if(n>1 && y[n]<=y[n-1]){ //em caso de colisão*
                Nef--;
                vy[n-1]= (m[n]*vy[n]+m[n-1]*vy[n-1])/(m[n]+m[n-1]);
                vy[n]=vy[n]+m[n-1]*(vy[n]-vy[n-1])/(m[n]+m[n-1]);
                m[n-1]=m[n]+m[n-1]; //atualização da velocidade
                m[n]=m[n]-m[n-1]; //atualização da massa
            }
        }
        fprintf(arq, "\n");
        t+=Dt;
    }

    printf("\n\tNúmero inicial de partículas: %d\n", N);
    printf("\n\tNúmero efetivo de partículas, ao final: %d\n", Nef);
    printf("\n\tMassa da partícula única, ao final: %f gramas\n", m[1]*1000);
    printf("\n\tTempo total de queda: %f segundos\n", t);
    printf("\n\tPosicao inicial da partícula N = %d: %f metros\n", N, yN0);
    printf("\n\tPosicao final da partícula 2: %f metros\n", y[2]);
    printf("\n\tPosicao final da partícula 1: %f metros\n", y[1]);
    printf("\n\tPosicao inicial do CM: %f metros\n", yCM0);
    printf("\n\tPosicao final do CM: %f metros\n", yCM);

    fclose(arq);
}

//Neste programa, supõe-se que as partículas colidem sequencialmente,
// de cima para baixo. Caso isso não ocorra, haverá erros na simulação.
// Checar os gráficos, para confirmar que as colisões ocorreram.
```

Figura 8: Código base escrito em linguagem C, a partir do qual foram realizadas as simulações apresentadas nesta seção.

contém os valores teóricos previstos para a posição do centro de massa, ao longo do tempo. Essa previsão é feita com o uso da igualdade

$$y_{\text{CM,teórico}} = y_{\text{CM}0} - \frac{1}{2}gt^2, \quad (43)$$

em que $y_{\text{CM}0}$ é a posição inicial calculada para o centro de massa. Esta coluna existe como um teste para a simulação: é esperado que os gráficos de $y_{\text{CM}} \times t$ e $y_{\text{CM,teórico}} \times t$ se superponham. E adiantamos que isso ocorreu em todas as simulações que realizamos! As demais colunas contém os valores das posições y_n , com $n = 1, 2, 3, \dots, N$, calculadas a cada passo temporal (enquanto a partícula correspondente não tiver se fundido com outra). Um programa à parte deve ser usado para gerar gráficos das posições na tabela, em função do tempo. (Fizemos uso do programa de código aberto

```

Numero inicial de particulas: 6
Numero efetivo de particulas, ao final: 1
Massa da particula unica, ao final: 273.500000 gramas
Tempo total de queda: 0.366744 segundos
Posicao inicial da particula N = 6: 1.938237 metros
Posicao final da particula 2: -0.005764 metros
Posicao final da particula 1: -0.005763 metros
Posicao inicial do CM: 0.653291 metros
Posicao final do CM: -0.005763 metros

```

Figura 9: Saída na tela gerada pelo programa em C apresentado na Fig. 8, que também cria o arquivo `tabela.dat`.

SciDAVis. No programa em Python, esses gráficos são gerados de forma muito simples.¹⁷)

Como o intervalo de tempo δt escolhido é muito pequeno, e o tempo total de queda (até o encontro das partículas 2 e 1) é da ordem de meio segundo, o arquivo `tabela.dat` é muito grande – mas tem a vantagem de registrar todos os dados gerados pela simulação. Para otimizar o processo de visualização, o programa na Fig. 8 pode ser ligeiramente modificado para a realização de impressões em arquivo, digamos, a cada milissegundo. (Isto não significa fazer $\delta t = 1$ ms, mas *imprimir* em arquivo a cada 1 ms transcorrido na simulação.)

Ao final da simulação, o programa em C imprime na tela alguns resultados, que também servem para uma checagem adicional de que a simulação foi corretamente realizada. A Fig. 9 apresenta a saída gerada pelo programa em C apresentado na Fig. 8.

A Fig. 10 apresenta gráficos construídos com o programa SciDAVis a partir do arquivo `tabela.dat` gerado pelo código na Fig. 8. Temos as posições das partículas 1 a 6 (pois fizemos, no código da Fig. 8, $N = 6$), além da posição do centro de massa do sistema (calculada com a igualdade (42)) e de sua previsão teórica (calculada com a igualdade (43)). A primeira coisa a observar é que os gráficos da posição do centro de massa e de sua previsão teórica se superpõem muito bem! Claro, não é nenhuma surpresa, mas era um teste pelo qual o nosso programa teria que passar. Agora, observe como as partículas vão se encontrando sequencialmente de cima para baixo (ficando unidas após cada colisão). Observe, inclusive, que a inclinação da curva logo após cada colisão está entre as inclinações das duas curvas imediatamente antes

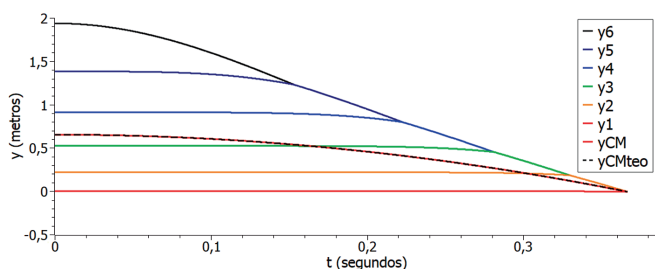


Figura 10: Gráficos a partir da tabela gerada pelo programa em C apresentado na Fig. 8.

¹⁷ O programa em C também poderia gerar seus próprios gráficos, embora de forma bem menos amigável que em Python.

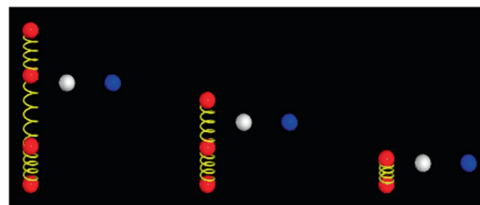


Figura 11: Imagens obtidas a partir de uma animação criada pelo programa em Python (sistema inicialmente com 6 partículas).

da colisão, como esperado – já que a velocidade da nova partícula formada pela colisão é a média ponderada das velocidades das partículas que colidem (veja (27)). Contudo, como a cada nova colisão a massa da partícula superior é cada vez maior, a inclinação da curva logo após a colisão vai diferindo cada vez menos da inclinação da curva superior, imediatamente antes da colisão.

Considerando nosso principal interesse neste trabalho (lembre-se: estamos defendendo que a imobilidade contraintuitiva da base de uma Slinky em queda pode ser explicada sem a ideia de que leva um tempo para a informação de que a extremidade superior da Slinky foi solta chegar à extremidade inferior), o mais importante a observar, na Fig. 10, é que quanto mais abaixo está uma partícula, menos ela se move até a chegada da partícula acima dela. Isso reproduz muito bem, nesse sistema com apenas 6 partículas, o comportamento de uma Slinky em queda (com uma bola de tênis presa à sua extremidade inferior), mesmo com a informação de que a partícula mais acima se moveu chegando quase instantaneamente à partícula mais abaixo!¹⁸ A saída na Fig. 9 mostra que a partícula 1 se moveu menos de 6 milímetros até o colapso do sistema – o que é consistente com o que vemos na Fig. 3 –, e tudo ocorreu em aproximadamente 0,37 segundos. (Compare as demais informações na Fig. 9 com o que mostra a Fig. 10.)

A Fig. 11 mostra três imagens obtidas a partir de uma animação criada pelo programa em Python para um sistema inicialmente com 6 partículas. A esfera branca indica a posição vertical do centro de massa do sistema, e a esfera azul indica a posição vertical prevista para o centro de massa (como esperado, posições idênticas, dentro da precisão da simulação). Observe que a esfera mais abaixo praticamente não se move.

Outro teste que fizemos para o código base na Fig. 8 foi a reprodução dos resultados obtidos analiticamente na seção anterior. Vimos que o modelo de Graham (com 2 partículas e 1 mola), aplicado à Slinky metálica usada no experimento realizado por Cross e Wheatland [6], nos dá um deslocamento máximo (em módulo) da partícula inferior de 0,147 m, e um tempo total de queda de 0,398 s

¹⁸ Tecnicamente, na simulação realizada, são necessários N passos temporais, a partir de $t = 0$, para que a partícula mais abaixo comece a se mover. Mas podemos fazer o passo temporal δt tão pequeno quanto a precisão da variável usada permita.

- (a) Tempo total de queda: 0.398 segundos
Posicao final da partícula 1: -0.147 metros
- (b) Tempo total de queda: 0.438 segundos
Posicao final da partícula 1: -0.178 metros

Figura 12: Trechos das saídas na tela geradas pelo programa em C apresentado na Fig. 8, mas com $N = 2$ e (a) $m_{\text{tênis}} = 0$ ou (b) $m_{\text{tênis}} = 0,058 \text{ kg}$.

(lembrando que nos beneficiamos dos cálculos realizados por Tort, Francisquini e Machado [17]). Adaptando o modelo de Graham à situação apresentada na Fig. 3, em que uma bola de tênis está presa à extremidade inferior da Slinky, previmos um deslocamento máximo da partícula inferior de $0,178 \text{ m}$, e um tempo total de queda de $0,438 \text{ s}$. Todos estes resultados foram obtidos com o uso do código na Fig. 8 (com $N = 2$ e $m_{\text{tênis}} = 0$ ou $m_{\text{tênis}} = 0,058 \text{ kg}$), quando os imprimimos com a aproximação de 3 casas decimais, como mostram os trechos das saídas apresentados na Fig. 12.

Há muitas investigações interessantes que podemos realizar a partir do programa base na Fig. 8, e os estudantes que desejarem poderão nos solicitar por e-mail este código, que o enviaremos com prazer.

Uma das investigações mais interessantes (e que prometemos apresentar) consiste em analisar como a distância total percorrida pela partícula 1 varia com o número inicial N de partículas no sistema, mantida fixa sua extensão inicial $l_0 = 1,26 \text{ m}$ (não incluída a bola de tênis, portanto). Verificamos que essa distância $|\Delta y_1|_{\text{max}}$ cai muito rapidamente com N . Para $N = 2$, obtemos $|\Delta y_1|_{\text{max}} = 14,7 \text{ cm}$, e essa distância já cai para $|\Delta y_1|_{\text{max}} = 1,2 \text{ cm}$ com $N = 4$. Com $N = 8$, obtemos $|\Delta y_1|_{\text{max}} = 0,6 \text{ mm}$, que é nada, em termos práticos. Com $N = 512$, o programa nos dá $|\Delta y_1|_{\text{max}} = 1,9 \times 10^{-11} \text{ m}$! *Se entendemos que a Slinky é melhor modelada com um número N grande de partículas no sistema da Fig. 4, podemos dizer que a mecânica clássica prevê, com esse modelo, que – em termos absolutamente práticos – a base da Slinky fica em repouso até a chegada da extremidade superior, mesmo com a informação de que a extremidade superior foi abandonada chegando à extremidade inferior quase instantaneamente, e mesmo, no modelo, com a base se movendo assim que a extremidade superior se move; mas é que esse movimento é absolutamente desprezível para N grande.* Foi para dar ênfase a este resultado, principalmente, que este artigo foi escrito (embora acreditemos que ele traz outros benefícios pedagógicos para estudantes de graduação em física – incluindo a possibilidade de realização de investigações adicionais com o uso do código na Fig. 8.)

E o que acontece com o tempo total de queda, quando aumentamos o valor de N (com $m_{\text{tênis}} = 0$, $m_{\text{Slinky}} = 0,2155 \text{ kg}$ e $l_0 = 1,26 \text{ m}$)? As simulações que realizamos mostram que ele parece convergir rapidamente para $0,3 \text{ s}$, com aproximação de 1 casa decimal – que, com esta mesma aproximação, é o valor que Cross e Wheatland

obtiveram com seu modelo [6]. Maravilha, não acha? (Com aproximação de 2 casas decimais, o tempo total de queda em nossas simulações parece convergir para $0,29 \text{ s}$, e o valor que Cross e Wheatland obtiveram com seu modelo foi de $0,27 \text{ s}$. Consideramos uma ótima concordância, observando que são modelos distintos, e lembrando que o tempo de queda não foi o único parâmetro livre no modelo de Cross e Wheatland.)

Vamos concluir esta seção apresentando mais uma possibilidade de uso do código na Fig. 8. Para deixar a base da Slinky “levitando” pelo maior tempo possível, podemos fixar à sua extremidade superior um corpo com massa muito elevada. Isso não muda a extensão inicial da Slinky, mas a elevada inércia desse corpo diminui consideravelmente a aceleração inicial da extremidade superior da Slinky, quando abandonada a partir do repouso. Como físicos, somos convidados a prever qual seria o tempo total de queda, até o colapso da Slinky. Ora, por ter uma massa muito superior à da Slinky, esse corpo “não sente” sua presença, e então se move praticamente em queda livre. Alcança a base da Slinky, portanto, após o seguinte intervalo de tempo: $\sqrt{2l_0/g} \approx 0,51 \text{ s}$, com $l_0 = 1,26 \text{ m}$ e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Então este deve ser o valor que o programa na Fig. 8 nos dá para o tempo total de queda, ao atribuirmos à partícula mais acima (a partícula N) uma massa bem maior que a massa da Slinky. Fazendo $m_N = 10 \text{ kg}$ e $m_{\text{tênis}} = 0$ obtivemos, já com $N = 7$, e com aproximação de 2 casas decimais, este tempo de queda! (A gente se diverte!)

4. Observações adicionais

Antes de encerrar, vale lembrar que uma Slinky possibilita a realização de uma série de outras atividades didáticas, além da exploração do comportamento curioso para o qual nos voltamos neste trabalho (da aparente levitação de sua extremidade inferior, quando em queda). Por se tratar de um tipo de mola, não surpreende ter sido objeto de análises envolvendo oscilações e ondas [19–21].¹⁹ Mas há também trabalhos em que a geometria de uma Slinky em equilíbrio estático é analisada, quando suspensa verticalmente [22] e “em forma de U” [23]. Há até um trabalho em que é estudado o tempo de queda de uma conta deslizando por uma Slinky verticalmente suspensa [24]. O professor Gluck propôs, em 2010, várias atividades didáticas para realização em laboratório, com o uso de uma Slinky [25]. Essas atividades vão desde a observação de que esse tipo de mola tem um comportamento que não obedece à lei de Hooke quando corpos de pequena massa são suspensos por ela, até medições de velocidades de pulsos (transversais

¹⁹ Um dos resultados curiosos encontrados [21] é que se a extremidade inferior de uma Slinky é pressionada contra sua extremidade superior, fixa, e em seguida é abandonada, as espiras mais acima desenvolvem uma oscilação triangular, enquanto as espiras mais abaixo oscilam quase harmonicamente (ou seja, de forma quase senoidal).

e longitudinais) e análises de modos de vibração e de formação de ondas estacionárias – tanto em uma Slinky suspensa verticalmente como em uma Slinky suspensa horizontalmente.

Referências

- [1] R. Lallensack, *The Accidental Invention of the Slinky*, disponível em: <https://www.smithsonianmag.com/innovation/accidental-invention-slinky-180973016/>
- [2] VERITASIAM, *Does a Falling Slinky Defy Gravity?* disponível em: <https://youtu.be/uiyMuHuCFo4>, acessado em: 01/03/2023.
- [3] THE UNIVERSITY OF SYDNEY, disponível em: <http://www.physics.usyd.edu.au/~wheat/>, acessado em: 01/03/2023.
- [4] VERITASIAM, *Slinky Drop Answer*, disponível em: <https://youtu.be/eCMMMEEyOO0>, acessado em: 01/03/2023.
- [5] VERITASIAM, *Slinky Drop Extended*, disponível em: <https://youtu.be/oKb2tCtpvNU>, acessado em: 01/03/2023.
- [6] R.C. Cross e M.S. Wheatland, *American Journal of Physics* **80**, 1051 (2012).
- [7] M.G. Calkin, *American Journal of Physics* **61**, 261 (1993).
- [8] M. Graham, *The Physics Teacher* **39**, 90 (2001).
- [9] F.L. Silveira e R. Axt, *Física na Escola* **6**, 5 (2005).
- [10] J.M. Aguirregabiria, A. Hernández e M. Rivas, *American Journal of Physics* **75**, 583 (2007).
- [11] W.G. Unruh, arXiv:1110.4368v1 (2011).
- [12] W.G. Unruh, arXiv:1110.4368v2 (2021).
- [13] H. Sakaguchi, *Journal of the Physical Society of Japan* **82**, 073401 (2013).
- [14] R.H. Plaut, A.D. Borum, D.P. Holmes e D.A. Dillard, *Journal of Sound and Vibration* **349**, 195 (2015).
- [15] R.J. Vanderbei, *The American Mathematical Monthly* **124**, 24 (2017).
- [16] S.R. Holcombe, *Journal of Applied Mathematics and Physics* **69**, 19 (2018).
- [17] A.C. Tort, M.F.B. Francisquini e R.R. Machado, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20200421 (2021).
- [18] M. Gardner, *The Physics Teacher* **38**, 78 (2000).
- [19] J.M. Bowen, *American Journal of Physics* **50**, 1145 (1982).
- [20] R.A. Young, *American Journal of Physics* **61**, 353 (1993).
- [21] J. Pretz, *European Journal of Physics* **42**, 045008 (2021).
- [22] A.P. French, *The Physics Teacher* **32**, 244 (1994).
- [23] A. Eskandari-asl, *European Journal of Physics* **39**, 055005 (2018).
- [24] H. Sarafian, em: *International Conference on Computational Science 2004*, Cracóvia, 2004, editado por M. Bubak, G.D. van Albada, P.M.A. Sloot e J. Dongarra (Springer-Verlag, Berlin, 2004).
- [25] P. Gluck, *Physics Education* **45**, 178 (2010).