

Visualización del campo electrostático con Excel y Maple para la enseñanza en ingeniería

Electrostatic field visualization with Excel and Maple for engineering education

Yomber Montilla López^{*1}, Franyelit Suárez Carreño², Brexys Linares Rodríguez³

¹Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Quevedo, Ecuador.

²Universidad de las Américas, Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Quito, Ecuador.

³Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Posgrado, Portoviejo, Ecuador.

Recibida en 05 de Octubre, 2024. Revisado en 05 de Febrero, 2025. Aceptado en 08 de Febrero, 2025.

En este trabajo se presenta la solución de la ecuación de Poisson para determinar el campo electrostático en un dominio cuadrado, utilizando el método de Liebmann para asegurar la estabilidad de la solución. Se emplean las herramientas de software Excel y Maple para observar el comportamiento del potencial eléctrico. Excel ofrece precisión y rapidez en el proceso, pero una representación gráfica menos atractiva. En contraste, Maple proporciona gráficos detallados, con definición de líneas de campo y elementos del modelo. Los resultados indican que la enseñanza en ingeniería puede beneficiarse de métodos de simulación numérica, facilitando la comprensión de conceptos y teorías para futuros desarrollos.

Palabras clave: Simulación y modelación, física, enseñanza en ingeniería, simulación con Excel, simulación con Maple.

This work presents the solution of Poisson's equation to determine the electrostatic field in a square domain, using Liebmann's method to ensure the stability of the solution. Excel and Maple software tools are used to analyze the electric potential and electric field behavior. Excel offers accuracy and speed, albeit with a less attractive graphical representation. In contrast, Maple provides detailed graphics, including definitions of field lines and model elements. The results indicate that engineering education can benefit from numerical simulation methods, facilitating understanding of concepts and theories for future developments.

Keywords: Simulation and modeling, physics, engineering education, Excel simulation, Maple simulation.

1. Introducción

La educación en ciencias ha tenido una historia colmada de complejidades para estudiantes y profesores, donde la comprensión de conceptos abstractos no ha sido un camino sencillo para ninguno de los involucrados, tanto para el que aprende como para el que enseña. Sin embargo, con la incorporación de herramientas digitales, resulta más práctico dar a conocer estos conceptos acompañados de figuras, gráficos y representaciones visuales que facilitan su interpretación y análisis. De esta manera, la visualización de campos eléctricos y líneas equipotenciales es un aspecto fundamental en la enseñanza del electromagnetismo, y la utilización de tecnologías digitales ha demostrado ser una estrategia efectiva para mejorar la comprensión y el rendimiento académico de los estudiantes [1].

En el caso del estudio de la electrostática, un problema de valor en frontera (PVF) es un sistema que se aborda mediante las ecuaciones de Poisson y Laplace. En estos problemas, se desea hallar el campo electrostático en el interior de una región delimitada por una frontera, donde

se conocen la distribución de carga y el potencial [2]. Tradicionalmente, la enseñanza de estos conceptos se ha basado en métodos teóricos y experimentos de laboratorio que, aunque efectivos, presentan limitaciones en cuanto a la visualización y manipulación de los fenómenos físicos en tiempo real.

Sin embargo, la implementación de herramientas digitales, como simulaciones interactivas y software especializado, ofrece una oportunidad para dar solución de forma innovadora a estas situaciones, permitiéndole a los estudiantes manipular, interactuar y explorar los campos eléctricos de forma interactiva, visual y con la posibilidad de ir observando en simultáneo el cambio de valores, datos, ecuaciones, que caracterizan el sistema [3]. En este sentido, algunos autores [4] han destacado el potencial didáctico de las tecnologías digitales, como herramientas que no solo facilitan la visualización y comprensión de conceptos complejos, sino que también permiten una interacción más dinámica y práctica con los fenómenos físicos, lo que además despierta el interés y la curiosidad de los jóvenes.

Algunas investigaciones [3, 4] han demostrado que los estudiantes que utilizan simuladores digitales para estudiar los campos eléctricos han podido desempeñarse

*Correo electrónico: ymontillal@uteq.edu.ec

de mejor manera en sus evaluaciones, en comparación con aquellos que utilizaron únicamente los métodos tradicionales. Esto puede deberse a que los campos electromagnéticos no son visibles en una realidad cotidiana, y comprender la visión abstracta de ellos puede ser complejo para las personas. Por su parte, en Europa [5], algunos proyectos educativos han considerado la inclusión de las herramientas digitales en la enseñanza de la física, logrando una importante motivación en el colectivo estudiantil, así como mejoras en sus resultados académicos. Cada vez resulta más importante incluir conocimientos digitales en el estudio de las ciencias, y esto incluye la capacidad de recolectar y procesar datos, así como analizarlos y presentarlos de forma apropiada, lo que revela que las competencias digitales deben ser consideradas para incluirse en el currículo académico de física.

Algunos softwares especializados facilitan la representación de líneas equipotenciales, además de la visualización de parámetros y variables asociadas, que fortalecen el aprendizaje activo y significativo [5]. Entre estos softwares se pueden mencionar Matlab, GeoGebra, EJS, Maple, e incluso Excel, que permiten una interacción entre los estudiantes y los parámetros relacionados al campo electromagnético. Estas herramientas ofrecen el análisis de datos en el área de campos electromagnéticos, ofreciendo, además, una visualización gráfica atractiva, fácil de interpretar y manipulable para que los estudiantes puedan variar los parámetros y observar los cambios simultáneamente.

A pesar de que aún existen limitaciones en algunas regiones, la globalización de la educación y el acceso a herramientas digitales, han dado paso a que la innovación didáctica se propague en gran parte de los países, logrando trascender fronteras que benefician a estudiantes en diferentes contextos y niveles educativos. En Latinoamérica, aun habiendo un número importante de desigualdades sociales, se ha podido adoptar estas tecnologías, demostrando que la digitalización en la educación científica puede reducir brechas y ofrecer oportunidades de aprendizaje equitativas [6, 7]. De manera que, en la enseñanza de la física, el uso de recursos digitales ha sido un potencial valioso para reducir las necesidades de grandes laboratorios, logrando incorporar prácticas de gran relevancia como el estudio del campo electromagnético y la visualización de líneas equipotenciales. Estas nuevas alternativas globales, no solo facilitan la comprensión de conceptos, sino que, además, permiten integrar la ciencia, la tecnología y la sociedad, en entornos de aprendizaje virtuales.

2. Marco Teórico

La educación con herramientas digitales ha revolucionado la forma en que se enseña y se aprende en la sociedad moderna [8], de tal manera, que esta evolución apresurada de la educación ha cambiado también la

manera en que se entienden los modos de comunicación, la interacción social y las perspectivas de desarrollo. Por tanto, esta transformación ha impactado no solo el ámbito educativo, sino también la estructura social y económica de manera significativa, esto debido a que, las tecnologías digitales, como las plataformas de aprendizaje en línea, las simulaciones interactivas y las aplicaciones educativas, han proporcionado nuevas oportunidades para el aprendizaje personalizado y el acceso a recursos educativos de alta calidad, independientemente de la ubicación geográfica y de las realidades del contexto, pudiendo unificar conceptos y teorías de forma remota.

En los países desarrollados, las herramientas digitales se han integrado de manera profunda en el sistema educativo [9, 10], de ahí que algunas instituciones en Estados Unidos, Europa y partes de Asia hayan adoptado plataformas de aprendizaje en línea, software educativo y tecnologías de realidad aumentada y virtual para mejorar la enseñanza y el aprendizaje [11]. Por otra parte, en Finlandia, conocida por su sistema educativo de alta calidad, se utilizan ampliamente las tecnologías digitales para fomentar un aprendizaje activo y participativo [12, 13]. Estas herramientas no solo facilitan la comprensión de conceptos complejos, sino que también permiten a los estudiantes desarrollar competencias digitales críticas para el siglo XXI.

Resulta importante mencionar que la pandemia de COVID-19 aceleró la adopción de estas tecnologías en todo el mundo, demostrando su valor en situaciones donde la enseñanza presencial no era posible [14, 15]. Durante este período, herramientas como Zoom, Google Classroom y Moodle se convirtieron en componentes esenciales de la educación diaria, permitiendo a millones de estudiantes continuar su educación desde casa [16]. Un estudio realizado en Alemania, Finlandia y Croacia reveló que la pandemia impulsó significativamente el uso de tecnologías digitales en los cursos de laboratorio de física, mejorando la comunicación, la colaboración y la organización [5].

Por otro lado, los países en desarrollo, como los países latinoamericanos, enfrentan desafíos únicos en la implementación de herramientas digitales en la educación [6, 17]. Factores como la falta de infraestructura tecnológica, la limitada conectividad a internet y la escasez de recursos financieros dificultan la integración de tecnologías avanzadas en las aulas, sin embargo, iniciativas internacionales y esfuerzos locales están trabajando para cerrar esta brecha digital [7]. En el caso de América Latina, proyectos como “Conectar Igualdad” en Argentina y “One Laptop per Child” en Perú han proporcionado dispositivos digitales y acceso a internet a estudiantes en áreas rurales y desfavorecidas [18–20]. Estas iniciativas buscan democratizar el acceso a la educación digital, ofreciendo a los estudiantes de estas regiones la oportunidad de beneficiarse de las mismas herramientas educativas disponibles en países más desarrollados.

La globalización y el avance tecnológico también han impulsado la colaboración internacional en el ámbito educativo, algunas plataformas como Coursera y edX ofrecen cursos en línea de universidades de renombre mundial, accesibles a estudiantes de todo el mundo. Esto ha permitido a los estudiantes de países en desarrollo acceder a educación de alta calidad y a recursos que de otro modo estarían fuera de su alcance [6]. Además, la cooperación entre instituciones educativas de diferentes países ha llevado al desarrollo de programas de intercambio y proyectos de investigación conjunta que benefician a estudiantes y educadores a nivel global.

El impacto de las herramientas digitales en la educación se extiende más allá del aula, pues la digitalización de la educación fomenta la alfabetización digital, una habilidad esencial en el mundo moderno [8]. Los estudiantes que utilizan tecnologías digitales en su educación desarrollan competencias en el uso de software, la búsqueda de información en línea y la colaboración a través de plataformas digitales, habilidades que son vitales en el mercado laboral actual [21]. Al mismo tiempo, estas competencias serán la clave para el futuro profesional, que deberá desenvolverse en una industria digitalizada, en un contexto social cada vez más tecnológico.

2.1. Uso de Excel en la enseñanza de la física

El uso de Excel en la enseñanza de la física ha demostrado ser una herramienta poderosa para mejorar la comprensión de conceptos complejos y para fomentar habilidades analíticas en los estudiantes [22, 23]. De esta manera, Excel, como una hoja de cálculo multifuncional, ofrece diversas capacidades que pueden ser aprovechadas en el aula de física para visualizar datos, realizar cálculos y simular fenómenos físicos.

Una de las principales ventajas de utilizar Excel en la enseñanza de la física es su capacidad para manejar grandes cantidades de datos de manera eficiente [24]. Además, los estudiantes pueden ingresar datos experimentales y utilizar las funciones incorporadas para calcular resultados, generar gráficos y analizar tendencias. Esto es particularmente útil en la realización de experimentos de laboratorio donde se requiere analizar resultados experimentales y compararlos con teorías físicas [22, 23]. Por otro lado, también existe la posibilidad de crear gráficos de dispersión, histogramas y gráficos de línea permite a los estudiantes visualizar de manera clara las relaciones entre diferentes variables físicas [25, 26].

Excel también es una herramienta valiosa para la simulación de fenómenos físicos [25, 26], dado que, mediante el uso de fórmulas y funciones, se pueden crear modelos que representen sistemas físicos y permitan a los estudiantes explorar cómo diferentes variables afectan el comportamiento de estos sistemas. Una opción es que los estudiantes pueden modelar el movimiento de un proyectil, la oscilación de un péndulo o el comportamiento de un circuito eléctrico [27, 28]. Este tipo de simulaciones no solo ayuda a visualizar conceptos abstractos, sino que

también proporciona una plataforma interactiva para la experimentación y el descubrimiento [29].

La capacidad de Excel para automatizar cálculos repetitivos es otro beneficio significativo en la enseñanza de la física, ya que, en lugar de realizar cálculos manuales tediosos, los estudiantes pueden aprender a escribir fórmulas que automáticamente realicen estos cálculos, lo que les permite centrarse en la interpretación de los resultados y en el desarrollo de una comprensión más profunda de los principios físicos subyacentes [30]. Esta habilidad también es valiosa fuera del aula, ya que muchas carreras científicas y técnicas requieren competencias en el uso de hojas de cálculo para el análisis de datos, pero además proporciona una habilidad para la interpretación de gráficos e información en otros lenguajes de programación, en otros espacios y en la vida profesional.

Un estudio realizado por Tho et al. [31] destacó la efectividad del uso de Excel en la educación de la física. En su investigación, encontraron que los estudiantes que utilizaban Excel para analizar datos de laboratorio mostraban una mayor comprensión conceptual y una mejor capacidad para aplicar métodos científicos en comparación con aquellos que utilizaban métodos tradicionales. Esto demuestra que la educación tradicional debe combinar esfuerzos para incorporar herramientas digitales que sirvan de apoyo para la comprensión de fenómenos físicos y conceptos que no son de fácil comprensión sin el recurso visual apropiado.

El uso de estas herramientas digitales en la enseñanza de la física también promueve el desarrollo de competencias digitales, que son esenciales en el mundo moderno [32]. De esta manera, los estudiantes aprenden a utilizar una herramienta ampliamente utilizada en muchas disciplinas científicas y tecnológicas, lo que les proporciona una ventaja competitiva en el mercado laboral. Además, el manejo de datos y el uso de tecnologías digitales son competencias transversales que benefician a los estudiantes en una amplia gama de contextos educativos y profesionales. De esta manera, a lo largo del tiempo, se ha podido confirmar que Excel se ha consolidado como una herramienta valiosa en la enseñanza de la física [33, 34].

2.2. El uso de Maple en la enseñanza de la física

El uso de Maple en la enseñanza de la física ha emergido como una herramienta poderosa para mejorar la comprensión de conceptos complejos y para desarrollar habilidades analíticas avanzadas en los estudiantes [35]. Este software, está basado en el uso de cálculo simbólico y numérico, y además ofrece un entorno robusto para realizar cálculos algebraicos, resolver ecuaciones diferenciales, y visualizar datos y funciones, lo que lo convierte en una herramienta ideal para la educación en física [36].

Una de las principales ventajas de Maple es su capacidad para realizar cálculos simbólicos, a diferencia de las hojas de cálculo tradicionales, que están limitadas

a cálculos numéricos, Maple permite a los estudiantes manipular expresiones algebraicas y trabajar con fórmulas simbólicas. Esto es particularmente útil en la física teórica, donde es necesario simplificar expresiones complicadas, derivar ecuaciones de movimiento y resolver problemas que implican álgebra avanzada y cálculo [5].

Además, Maple proporciona potentes herramientas para resolver ecuaciones diferenciales, que son fundamentales en la física para describir una amplia variedad de fenómenos, desde el movimiento de partículas hasta la propagación de ondas. Los estudiantes pueden utilizar Maple para resolver tanto ecuaciones diferenciales ordinarias como parciales, lo que les permite explorar soluciones analíticas y numéricas a problemas físicos complejos. Esta capacidad es crucial para cursos avanzados de física, donde la solución de ecuaciones diferenciales es una habilidad esencial.

La visualización es otro aspecto destacado del uso de Maple en la enseñanza de la física. Maple permite a los usuarios crear gráficos 2D y 3D de funciones y datos, lo que facilita la comprensión visual de conceptos abstractos [4]. De manera que, los estudiantes pueden generar gráficos que muestren la evolución temporal de un sistema físico, visualizar campos vectoriales, o representar superficies y curvas en tres dimensiones. Esta capacidad de visualización ayuda a los estudiantes a interpretar resultados matemáticos y a comprender mejor las relaciones entre las variables físicas [37].

Estudios previos han demostrado que el uso de Maple en la enseñanza de la física mejora significativamente la comprensión de los estudiantes y su capacidad para aplicar conceptos teóricos a problemas prácticos [38]. Por otra parte, Maple también fomenta el aprendizaje interactivo y el autoaprendizaje, permitiendo que los estudiantes utilicen la herramienta para experimentar con diferentes parámetros y observar cómo cambian los resultados. Esta posibilidad de acceso interactivo permite la exploración de conceptos a un ritmo personalizado, además del análisis y la comprensión profunda de lo visto en clase. Por otra parte, el software cuenta con herramientas de ayuda, tutoriales y recursos para el auto aprendizaje, lo que promueve la curiosidad y el interés por el conocimiento.

2.3. La enseñanza de la ingeniería

La enseñanza en las carreras de ingeniería ha sido, históricamente, un reto para los docentes, ya que implica la comunicación de áreas de cálculos de difícil comprensión para los estudiantes. Estas materias, que son la base de la ingeniería, han significado un desafío para la educación técnica y tecnológica que implican las carreras de ingeniería. Adicional a esto, se suma el hecho de que estas carreras requieren un alto dominio práctico y uso de laboratorios.

Sin embargo, es importante enseñar a los estudiantes que el cálculo no debe ser visto solo como un conjunto de reglas y algoritmos, sino como una herramienta

esencial para desarrollar un razonamiento profundo y significativo. Como plantea Uhden et al. [39], en su trabajo *Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education*, el enfoque del cálculo debe orientarse hacia el desarrollo de habilidades estructurantes. Estas habilidades permiten que los estudiantes interpreten, razonen y comprendan los principios y estructuras matemáticas más allá de la mera resolución técnica de problemas. De esta forma, el cálculo trasciende su carácter instrumental y se convierte en un medio para construir significados y promover un aprendizaje integral en la resolución de problemas de ingeniería y física. La relevancia de este enfoque en la educación en ingeniería radica en que, al contextualizar el cálculo dentro de la realidad profesional de la ingeniería, se promueve una comprensión más profunda y significativa en los estudiantes, mejorando así su formación y preparación para enfrentar desafíos profesionales [40]. Esta perspectiva puede ejemplificarse a través de problemas concretos que reflejan las complejidades de los entornos reales de la ingeniería. Por ejemplo, la resolución de la ecuación de Poisson, aplicada al cálculo del campo eléctrico, tiene aplicaciones prácticas en campos como la protección catódica de tuberías en la industria petrolera. En este caso, la ecuación modela la distribución del potencial eléctrico alrededor de las tuberías metálicas, permitiendo diseñar sistemas eficientes para mitigar la corrosión mediante ánodos de sacrificio o corriente impresa [41, 42]. Este enfoque demuestra cómo la resolución de ecuaciones diferenciales no solo trasciende la teoría matemática, sino que también se convierte en una herramienta clave para resolver desafíos reales en la ingeniería.

Algunos autores [43] mencionan la importancia de los laboratorios en la formación de ingenieros, destacando las limitaciones de los laboratorios convencionales debido a restricciones presupuestarias, de espacio y de recursos. Por tanto, los laboratorios virtuales y remotos se presentan como soluciones innovadoras que pueden enriquecer el proceso educativo al complementar las limitaciones físicas de los entornos tradicionales [44]. Estos laboratorios no pretenden sustituir la experiencia proporcionada por los laboratorios físicos, sino que la complementan al ofrecer accesibilidad y flexibilidad. No obstante, es crucial reconocer que ciertas habilidades, como la manipulación directa de equipos y la interpretación de datos obtenidos en condiciones reales, son experiencias esenciales que solo los laboratorios físicos pueden proporcionar [45]. Estas prácticas permiten a los estudiantes enfrentar retos relacionados con los errores experimentales y las condiciones reales de medición, aspectos clave en su formación como ingenieros.

Por otro lado, los laboratorios virtuales permiten a los estudiantes realizar experimentos en un entorno simulado accesible desde cualquier lugar, lo que facilita el autoaprendizaje y la flexibilidad en la programación de prácticas. Además, permiten a los estudiantes interactuar con equipos reales a través de internet, combinando las ventajas de la experimentación práctica

con la accesibilidad de un entorno virtual. Estos espacios virtuales permiten a las instituciones educativas superar las limitaciones físicas y presupuestarias, al mismo tiempo que proporcionan a los estudiantes una experiencia de aprendizaje más rica y accesible [43]. Los simuladores, en este contexto, juegan un papel crucial al permitir la visualización y experimentación con fenómenos físicos que serían difíciles de observar de otro modo, facilitando la comprensión de conceptos abstractos y mejorando la formación práctica de los futuros ingenieros.

3. Metodología

En este trabajo se resuelve la ecuación de Poisson para determinar el potencial eléctrico $V(x, y)$ dentro de un cuadrado de lado L , considerando la ecuación (1)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}, \quad \text{para } (x, y) \text{ en } R; \quad (1)$$

donde ρ_s es la densidad superficial de carga y ϵ la permitividad eléctrica. Las condiciones de frontera se describen en (2) y (3) mediante:

$$V(0, y) = V_1, \quad V(L, y) = V_3 \quad (0 < y < L), \quad (2)$$

$$V(x, 0) = V_2, \quad V(x, L) = V_4 \quad (0 < x < L), \quad (3)$$

Este problema, conocido en la literatura como el *problema de Dirichlet*, modela la distribución del potencial eléctrico en el interior de un cuadrado [46–49]. La distribución de carga superficial en el interior de la región modeladas por la ecuación (4):

$$\rho_s(x, y) = \begin{cases} \frac{\epsilon V^+}{a^2}, & \text{para } |x - d_1| \leq a/2 \text{ y } |y - L/2| \leq a/2, \\ \frac{\epsilon V^-}{a^2}, & \text{para } |x - d_2| \leq a/2 \text{ y } |y - L/2| \leq a/2, \\ 0, & \text{en el resto de } R. \end{cases} \quad (4)$$

En la Figura 1, muestra la disposición geométrica del problema de Dirichlet, donde las fuentes del campo electrostático corresponden a dos placas cuadradas de lado a . Estas placas, ubicadas en las coordenadas $(d_1, L/2)$ y $(d_2, L/2)$ respectivamente, tienen potenciales constantes de igual magnitud con polaridades opuestas, V^+ y V^- .

Abordando el problema de Dirichlet mediante técnicas numéricas, una alternativa de calcular el potencial eléctrico dentro del cuadrado es utilizando la ecuación (5)

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\rho_s h^2}{\epsilon} \right). \quad (5)$$

En (5) se muestra la aproximación de diferencia finitas de la ecuación de Poisson [50]. Nótese que el cociente

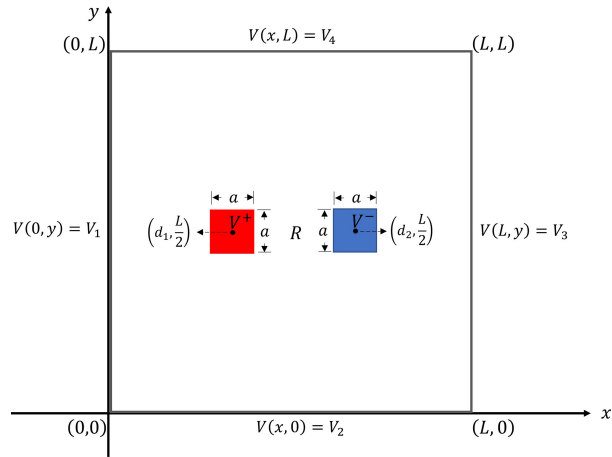


Figura 1: Problemas de Dirichlet para un cuadrado con dos placas cargadas.

$\rho_s h^2 / \epsilon$ tiene unidades de voltaje. La introducir la densidad de carga ρ_s de la ecuación (4), la ecuación (5) se simplifica como:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}), \quad (6)$$

por ser las placas de igual tamaño y tener voltaje de igual magnitud con polaridad opuesta. La discretización del potencial V es producto de dividir la región en una malla formada por n^2 elementos de dimensiones h^2 , con un número $(n - 1)^2$ de nodos o puntos interiores (x_i, y_i) como muestra la Figura 2(a). La ecuación (6) se calcula de manera iterativa para $i = 1$ hasta n y $j = 1$ hasta n empleando el método de Liebmann (iteración). La Figura 2(b) ilustra cuatro nodos de la malla interiores que se pueden tomar como punto de partida para el desarrollo iterativo del cálculo.

Se inicia el cálculo numérico en el primer punto interior diagonal a la esquina inferior izquierda del cuadrado. Al calcular el potencial mediante la ecuación (5), dos de los potenciales vecinos corresponden a los especificados en las fronteras y los otros dos, comúnmente, se toman inicialmente como cero. En ausencia de fuentes en las vecindades, se obtiene la primera aproximación del potencial en dicho punto. Al analizar el siguiente punto, un valor de potencial corresponde a uno de la frontera,

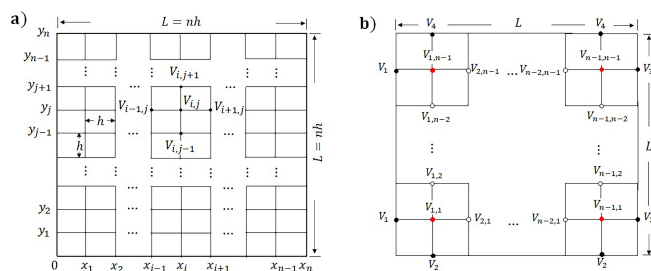


Figura 2: a) Malla cuadrada para la solución por diferencias finitas, b) Potencial en puntos interiores del cuadrado.

otro al primer potencial aproximado y los otros dos se toman como cero. Este proceso continúa hasta completar todos los puntos interiores de la malla, obteniéndose una primera aproximación.

Para la segunda aproximación, se retorna al punto de inicio donde los potenciales que se tomaron inicialmente como cero ahora toman los valores de la aproximación anterior. Este procedimiento se repite hasta que los valores numéricos convergen a una solución estable, es decir, hasta que el valor anterior y el nuevo del potencial en cada punto interior sean satisfactoriamente cercanos [48].

Una vez obtenido el potencial, el campo eléctrico se calcula como el negativo del gradiente numérico del mismo, utilizando diferencias divididas como se muestra la ecuación (7):

$$\vec{E}(x, y) = - \left(\frac{V_{i+1,j} + V_{i,j}}{h} \right) \hat{x} - \left(\frac{V_{i,j+1} + V_{i,j}}{h} \right) \hat{y}. \quad (7)$$

Los resultados numéricos para el potencial eléctrico y el campo eléctrico dependen fuertemente de h . Es de esperar que una disminución de h mejore la exactitud de la aproximación. Sin embargo, usar un tamaño menor de malla implica incrementar el número de puntos interiores y, por ende, realizar un mayor número de cálculo numérico e iteraciones, y en estos casos debe apelarse al uso de herramientas informáticas como se ilustra en la siguiente sección.

3.1. Criterios de trabajo

En este trabajo se ha considerado un cuadrado de lado $L = 10$ cm con potencial eléctrico nulo en sus lados, es

decir, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$ V. La región se divide en una malla de 1000 cuadros con lados $h = 0.1$ cm, lo que generara 9081 puntos interiores para el cálculo del potencial. A las fuentes se le asigna un voltaje de $V^+ = 12$ V y $V^- = -12$ V, distribuidos en placas de lado $a = 1$ cm. Estas placas, se ubican en las coordenadas (3.5, 5.0) cm y (6.5, 5.0) cm, respectivamente.

4. Resultados y Discusión

4.1. Recreación del problema de Dirichlet

La Figura 3 se muestra cómo se utilizan los valores para recrear la disposición geométrica del problema de Dirichlet de la Figura 1 en una hoja de cálculo Excel, aprovechando la presentación ortogonal de las celdas que ofrece el programa y su analogía con la malla que divide la región. En las celdas C2 y C3 se especifica la longitud y el número de particiones de los lados del cuadrado, mientras que en las celdas E2 y E3 se define el ancho de la cuadrícula y número de puntos interiores que conforman la malla. Los rangos de celda B7:B107 y C108:CY108 contienen las escalas numéricas del plano cartesiano, y se establece el potencial eléctrico nulo de las fronteras en los rangos de celda C7:CY7, CY7:CY107; C7:C107 y C107:CY107. Los potenciales eléctricos de 12 V y -12 V de las placas interiores se introducen en los rangos de celda AG52:AQ62 y BK52:BU62 respectivamente.

En la Tabla 1 se muestran las fórmulas utilizadas en estos rangos de celdas, donde se emplea la opción de arrastre para las replicarlas. Una vez recreado el escenario, se procede con el cálculo numérico del potencial eléctrico. Para ello, se introduce la ecuación (6) en la celda D8. Antes de copiar la fórmula en todas las celdas

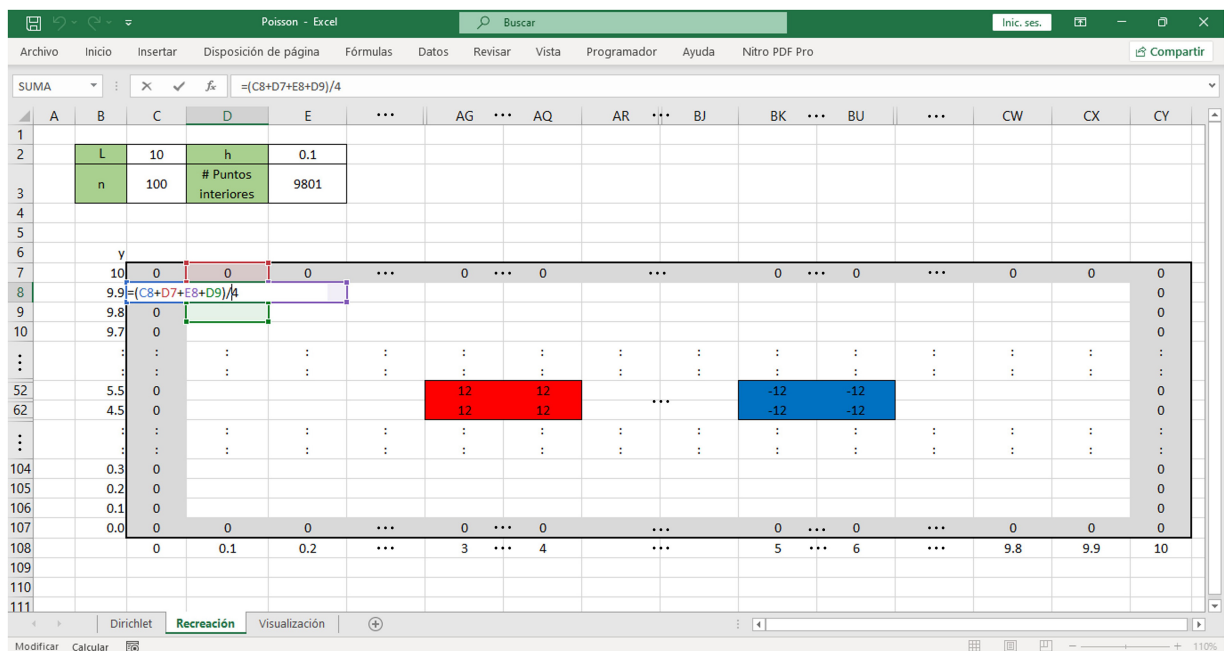


Figura 3: Recreación del problema de Dirichlet en Excel.

Tabela 1: Fórmulas en la hoja de cálculo.

Celda	Variable	Descripción	Comando de hoja de cálculo
C2	L	Longitud del cuadrado	= 10
C3	n	Partición de la longitud	= 100
E2	h	Longitud de la cuadrícula de la malla	= C2/C3
P4	(x_i, y_i)	Numero de nodos	= (C3-1)^2
B8	y	Coordenada en el eje y	= B7-\$E\$2
D108	x	Coordenada en el eje x	= C108+\$E\$2
C8	$V_{i,j}$	Potencial en el interior	= (C8+D7+E8+D9)/4
C7	V	Potencial en el borde	= 0
AG52	V^+	Potencial positivo de la placa interior	= 12
BK52	V^+	Potencial negativo de la placa interior	= -12

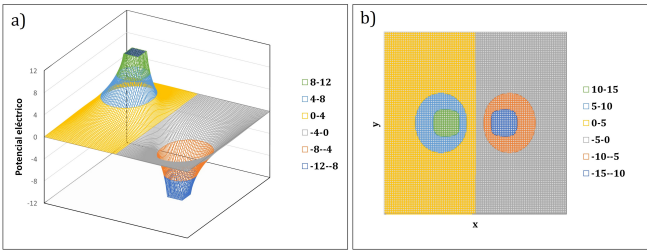


Figura 4: Visualización de potencial eléctrico en Excel: (a) Superficie; (b) Mapa de contorno.

vacías dentro del rango D8:CX106, se habilita la opción de “Cálculo iterativo” bajo la sección de “Fórmulas”. Se configuran 1000 como “Iteraciones máximas” y un “cambio máximo” de 0.001 para que Excel ejecute el método de Liebmann de manera iterativa al copiar la fórmula desde la celda D8. La solución obtenida converge logrando un resultado final estable.

Así pues, se tiene el valor de potencial eléctrico en 9081 celdas en el rango D8:CX106. Para la visualización de los datos, las opciones de gráficos tridimensionales de Excel son simples y limitadas. La Figura 4 muestra los resultados utilizando las funciones de gráfico de “Trama superficie de Excel” y “Contorno Reticular” de Excel. Estos gráficos ofrecen una representación básica del potencial, mostrando cambios perceptibles del potencial entre diferentes sectores de dominio. Sin embargo, Excel no ofrece opciones complementarias para representar claramente las líneas equipotenciales y gradientes.

4.2. Visualización de superficies equipotenciales y campos eléctricos

El potencial eléctrico de la recreación del problema Dirichlet, como se muestra en la Figura 3, se organiza en una matriz de 99×99 , creando así una base de datos estructurada. Para la representación gráfica de los mismos, utilizamos el software Maple 24. Comparado con Excel, Maple es una herramienta más especializada para la visualización de datos bidimensionales.

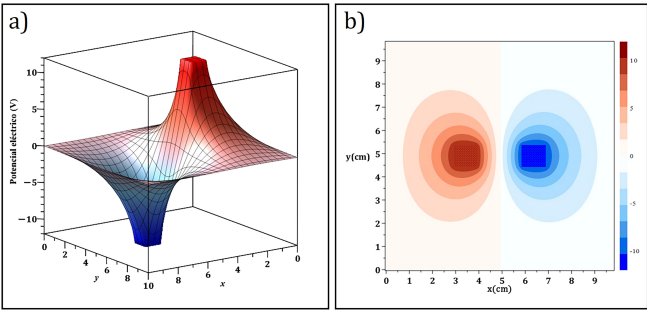


Figura 5: Visualización de potencial eléctrico en Maple: (a) Superficie; (b) Mapa de contorno.

En la hoja de trabajo de Maple, usamos los paquetes “with(ExcelTools)”, “with(plots)” y “with(LinearAlgebra)”. El paquete “ExcelTools” permite importar datos desde una hoja de cálculo de Excel, mientras que “plots” y “LinearAlgebra” proporcionan herramientas para la visualización y manipulación de datos, respectivamente. La Figura 5, muestra el gráfico de superficie y un mapa de contorno del potencial eléctrico, donde se puede apreciar una mayor nitidez y resolución comparados con lo de la Figura 4. Estas características permiten una mejor interpretación y presentación de los resultados.

Para la correcta elaboración de la Figura 5, se ha implementado el código descrito en la Figura 6.

Este código crea la variable “Potencial”, que representa la matriz de datos importados desde Excel mediante el comando “ExcelTools:-Import”. Asimismo, genera la variable “V” que calcula la traspuesta de la matriz “Potencial” usando el comando “Transpose”, alineando correctamente los datos que inicialmente presentan una disposición invertida, heredada de Excel. Cabe destacar que la variable “V” se utiliza para representar el potencial eléctrico en Maple. El comando “surfdata” permite visualizar el gráfico de superficie, Figura 5(a). Por otro lado, la definición de la función “f(x,y)” ajusta las coordenadas “(x,y)” para acceder correctamente a los valores de la matriz “V”. Esta función, junto con

```

Código de ejecución en Maple

Potencial := ExcelTools:-
Import("C:\Users\USER\Desktop\Potencial\Poisson.xls", "Dirichlet", "D8:CX106");

V := Transpose(Potencial);

surfdata(V, 0 .. 10, 0 .. 10, labels = [x, y, "Potencial
eléctrico (V)"], labeldirections = [horizontal, horizontal,
vertical], font = [Cambria, bold, 14], colorscheme =
["Blue", "LightSkyBlue", "Tomato", "Red"])

f := (x, y) -> V[round(x/0.1) + 1, round(y/0.1) + 1]

contourplot(f, 0 .. 10, 0 .. 10, labels = ["x(cm)", "y(cm)"],
labeldirections = [horizontal, horizontal], contours = [-12, -
10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12], grid = [100, 100],
filledregions = true, scaling = constrained, size = [600,
600], axesfont = [Cambria, bold, 14], axes = boxed,
'colorbar' = ['discrete'], colorscheme = ["Blue",
"LightSkyBlue", "White", "LightSalmon", "DarkRed"])

```

Figura 6: Captura de código para visualizar del potencial eléctrico en Maple.

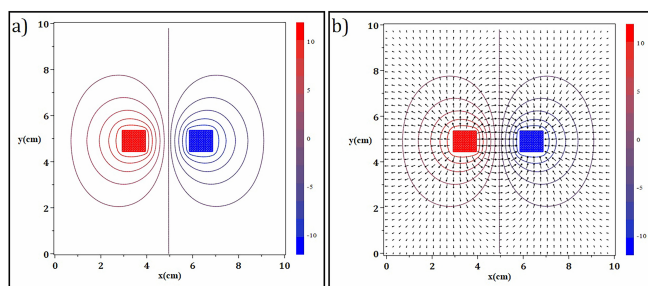


Figura 7: Visualización en Maple: (a) Equipotenciales; (b) Campo eléctrico.

el comando “*contourplot*”, crea el mapa de contorno, Figura 5(b).

La Figura 7 muestra las líneas equipotenciales y el campo eléctrico, ofreciendo una percepción detallada y profundamente informativa del campo electrostático. Estas visualizaciones permiten una comprensión más intuitiva y precisa de los fenómenos físicos representados.

La Figura 8 muestra el código apropiado para la elaboración de la Figura 7. Este código genera la variable “*Equipotential*” integrada el comando “*contourplot*”, similar al empleado en el gráfico de contorno anterior, pero omitiendo la opción “*filledregions = true*” para producir únicamente las líneas equipotenciales, como se muestra en la Figura 7(a).

Adicionalmente, el código crea las variables “*Ex*” y “*Ey*” que, vinculadas al comando “*Matrix*”, genera una matriz que representa cada componente del campo eléctrico. Intrínsecamente en el comando “*Matrix*” la sintaxis constituye un programa simple con el que maple calcula el negativo del gradiente numérico de la variable “*V*” utilizando la ecuación (7). La definición de las funciones “*g(x, y)*” y “*h(x, y)*” juegan el mismo papel de la función “*f(x, y)*” con “*V*” pero asociados a los valores de las matrices “*Ex*” y “*Ey*” respectivamente.

```

Código de ejecución en Maple

Equipotential := contourplot(f, 0 .. 10, 0 .. 10, labels =
["x(cm)", "y(cm)"], labeldirections = [horizontal,
horizontal], contours = [-12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8,
10, 12], grid = [100, 100], scaling = constrained, size =
[600, 600], axesfont = [Cambria, bold, 14], axes = boxed,
'colorbar' = ['discrete'], colorscheme = ["Blue", "Red"],
view = [0 .. 10, 0 .. 10])

Ex := Matrix(99, 99, (i, j) -> if i < 99 then (-V[i + 1, j] + V[i,
j])/0.1; else 0; end if);
Ey := Matrix(99, 99, (i, j) -> if j < 99 then (-V[i, j + 1] + V[i,
j])/0.1; else 0; end if);

g := (x, y) -> Ex[round(x/0.10) + 1, round(y/0.10) + 1];
h := (x, y) -> Ey[round(x/0.10) + 1, round(y/0.10) + 1];

Electric_Field := fieldplot([g, h], 0 .. 10, 0 .. 10, arrows =
SLIM, grid = [35, 35], scaling = constrained, size = [600,
600], axesfont = [times, bold, 12], fieldstrength = log, axes
= boxed)

plots[display](Equipotential, Electric_Field)

```

Figura 8: Captura de código para visualizar el campo electrostático en Maple.

Estas funciones definen un campo vectorial que junto con el comando “*fieldplot*”, permite visualizar el campo eléctrico. Por último, por simplicidad el código genera la variable “*Electric_Field*” que combinado con la variable “*Equipotential*” y el comando “*plot[display]*” permite visualizar en un mismo gráfico simultáneamente las líneas equipotenciales y el campo eléctrico, Figura 7(b). La Tabla 2 presenta las opciones adicionales utilizadas en los comandos de los códigos de las Figuras 6 y 7 que mejoran la presentación visual y estética de los resultados, y permiten al usuario personalizar las visualizaciones gráficas.

5. Conclusiones

El enfoque numérico basado en diferencias finitas aplicado en este trabajo demostró ser una técnica robusta y precisa para resolver el problema de Dirichlet en un cuadrado. La elección de un esquema iterativo, como el método de Liebmann, permitió la convergencia a una solución estable del potencial eléctrico en cada punto interior del dominio. Esta estabilidad es esencial, dado que, en problemas electrostáticos similares, la precisión del potencial determina directamente la exactitud en la estimación del campo eléctrico.

El uso de herramientas computacionales como Excel y Maple no solo facilitó la resolución numérica, sino que también permitió una visualización efectiva de los resultados. Aunque Excel ofreció una representación inicial del potencial eléctrico y una estructura para manejar los datos de la malla, sus limitaciones en términos de gráficos tridimensionales y visualización de equipotenciales y campos eléctricos se hicieron evidentes. Por otro lado, Maple proporcionó una plataforma más sofisticada para la representación gráfica, permitiendo no

Tabela 2: Opciones de graficas en Maple.

Comando	Descripción
Labels	Especifica las etiquetas de los ejes
labeldirections	Especifica la dirección en la que se imprimen las etiquetas a lo largo de los ejes
Font	Define la fuente para el título del gráfico, el subtítulo, las etiquetas de las marcas de graduación de los ejes y las etiquetas de los ejes
colorscheme	Aplicar un esquema de colores a un gráfico
scaling	Las escalas en todas las direcciones del gráfico son de igual proporción
contours	Proporciona una lista de contorno
filledregions	Las regiones definidas por las curvas se rellenan con diferentes colores
grid (contornos)	Especifica el tamaño de la cuadrícula bidimensional que se utilizará para representar gráficamente los contornos
view	Indica las coordenadas mínimas y máximas de la curva que se mostrarán en la pantalla
size	Especifica el tamaño de la ventana de gráfico
axesfont	Fuente para las etiquetas de las marcas de graduación de los ejes
axes	Especifica el tipo de eje
colorbar	Muestra una barra de color
arrows	Especifica el estilo de flecha que se utiliza para representar un vector
grid(vectores)	Especifica el tamaño de la cuadrícula bidimensional que se utilizará para representar gráficamente los vectores de campo
fieldstrength	Permite un control más preciso de cómo el tamaño de los vectores dibujados corresponde a la intensidad del campo

Fuente: Maple Support Help [51]. <https://www.maplesoft.com/support/help>

solo la visualización detallada del potencial y las líneas equipotenciales, sino también la incorporación del campo eléctrico en los mismos gráficos. Este contraste Destaca la importancia de utilizar herramientas especializadas cuando se requiere un análisis profundo y visualización clara en problemas de física aplicada. Sin embargo, es importante mencionar que ambas herramientas permiten evaluar el comportamiento de variables físicas de forma sencilla y dinámica para clases de física en ambientes académicos, permitiendo el acceso a laboratorios prácticos sin la necesidad de grandes espacios ni equipos sofisticados.

La influencia de las condiciones de frontera y la distribución de la carga superficial en la solución del problema es muy significativa. Las placas cargadas dentro del dominio crearon una distribución del potencial eléctrico que refleja de manera precisa los principios

fundamentales de la electrostática, confirmando que las aproximaciones numéricas bien implementadas pueden reproducir fielmente los fenómenos físicos observados en la realidad. A su vez, esto demuestra que la aplicación de simuladores en la enseñanza de la física resulta fundamental para la formación de profesionales, contribuyendo a la comprensión del aprendizaje de software especializados como herramientas complementarias para el diseño de ingeniería y tecnología avanzada.

Este trabajo ilustra la importancia de un enfoque interdisciplinario en la enseñanza y la investigación en física aplicada. La combinación de conceptos teóricos con métodos numéricos y herramientas computacionales avanzadas, como Excel y Maple, no solo facilita la resolución de problemas complejos, sino que también potencia la comprensión y la capacidad de visualización de los estudiantes e investigadores. Esta integración es clave para enfrentar los desafíos actuales en la modelización de fenómenos físicos y en el desarrollo de soluciones prácticas en ingeniería y ciencias aplicadas.

El uso de herramientas computacionales en la enseñanza de física se presenta como una alternativa idónea para la comprensión de conceptos y fenómenos asociados, que puedan representarse de forma práctica sin el uso de grandes laboratorios, lo cual se muestra como una opción para universidades e instituciones educativas donde no existan muchos recursos.

Referencias

[1] D. Fontes, R. Bueno, E. Ghuron y A. Machado Rodrigues, Revista De Enseñanza De La Física **35**, 123 (2023).

[2] Y. Inorreta, B. Bravo y S. Bravo, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias **19**, 13 (2024).

[3] K. Miller, J. Schell, A. Ho, B. Lukoff y E. Mazur, Physical Review Special Topics – Physics Education Research **11**, 010104 (2015).

[4] E. Klemencic, M. Mencinger y R. Repnik, in: *Edulearn24 Proceedings* (Palma, 2024).

[5] S.Z. Lahme, P. Klein, A. Lehtinen, A. Müller, P. Piriinen, L. Rončević y A. Sušac, Physical Review Physics Education Research **19**, 020159 (2023).

[6] A.J.P. Chacín, A.I. González y D.W. Peñaloza, Revista de ciencias sociales **26**, 98 (2020).

[7] W. Pirela-Espina, Revista Electrónica en Educación y Pedagogía **6**, 43 (2022).

[8] L.M. Morán Borja, G.L. Camacho Tovar y J.D.C. Parreño Sánchez, Dilemas contemporáneos: educación, política y valores **9**, 2860 (2021).

[9] E. Dans, RUSC Universities and Knowledge Society Journal **6**, 26 (2009).

[10] G.C. Ossa, Edutec. Revista electrónica de tecnología educativa **15**, 542 (2002).

[11] J.M.C. Gil, J.A. Lominchar y Á.B.F. Pucha, Revista Scientific **6**, 185 (2021).

[12] R. Kupiainen, S. Sintonen y J. Suoranta, Profesorado, **13**, 1 (2009).

[13] V. Gabarda Méndez, Revista Española de Educación Comparada **26**, 153 (2015).

- [14] J. Cifuentes-Faura, *Revista De Estilos De Aprendizaje* **13**, 115 (2020).
- [15] Á. Acevedo-Duque, A.J. Argüello, B.G. Pineda y P.W. Turcios, *Revista De Ciencias Sociales*, 26, 206 (2020).
- [16] C. Chiñas-Palacios, C. Vargas-Salgado, J. Águila-León y E.X.M. García, in: *IN-RED 2019. V Congreso de Innovación Educativa y Docencia en Red* (València, 2019).
- [17] M.S. Ramírez-Montoya, *Campus virtuales* **9**, 123 (2020).
- [18] S. Casablanco, *Educación* **50**, 103 (2014).
- [19] S.L. Martínez, A. Marotias y S. Amado, *Revista Educación y Pedagogía* **62**, 205 (2012).
- [20] D.W. Beuermann, J. Cristia, S. Cueto, O. Malamud e Y. Cruz-Aguayo, *American Economic Journal. Applied Economics* **7**, 53 (2015).
- [21] L. Levano-Francia, S. Sanchez Diaz, P. Guillén-Aparicio, S. Tello-Cabello, N. Herrera-Paico y Z. Collantes-Inga, *Propósitos y representaciones* **7**, 569 (2019).
- [22] R.B. Garrao, *Latin American Journal of Physics Education* **1**, 19 (2007).
- [23] D.C. Rodríguez, R.T. Cuenca y J.T. Pupo, *Ciencias Holguín* **16**, 1 (2010).
- [24] D. Rega Armas, Y. Guerra Véliz y J. Leyva Haza, *Pedagogía y Sociedad* **25**, 226 (2022).
- [25] Z.L. Vera Zavaleta, *Desarrollo de habilidades computacionales en VBA excel para el aprendizaje del tema MRUV del curso de física*. Tesis de Enseñanza, Universidad de Trujillo, Trujillo (2023).
- [26] A.D. Rebouças, E.L. Oliveira y L.L. Lima Sousa, *Caderno Pedagógico* **21**, e5170 (2024).
- [27] J.C.A. González, J.A.Á. Salas, R.I.H. Molinar y J.A.C. Cruz, *ANFEI Digital* **15**, 909 (2023).
- [28] M. Pérez Martínez, J. Ramos Guardarrama y A. Rodríguez Palacio, *Ingeniería Energética* **44**, 123 (2023).
- [29] N.D. Lugo López, D.A. Barrera Buitrago, D.L. Tique Escobar, F.A. Torres Payoma y D.C. Herrera Muñoz, *Reidocrea* **13**, 258 (2024).
- [30] L.A. Charfuelan Oliva, *Articulación de actividades de enseñanza a través del programa Excel, como estrategia para mejorar las habilidades de lectura e interpretación de gráficas estadísticas comunes en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Genaro León*. Tesis de Enseñanza, Universidad de Santo Tomás, Bogotá (2023).
- [31] S.W. Tho, K.W. Chan e Y.Y. Yeung, *Journal of Science Education and Technology* **24**, 580 (2015).
- [32] P.A. Taborda Peláez, *Uso de la herramienta Microsoft Excel a través del aprendizaje basado en proyectos para el fortalecimiento del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Julia Restrepo de la ciudad de Tuluá, Valle del Cauca*. Tesis de Maestría, Universidad de Cartagena, Cartagena (2024).
- [33] J.C. Mendoza García, *Uso didáctico de Microsoft Excel en la enseñanza de operaciones matemáticas en la educación básica superior de las Unidades Educativas de Chone*. Tesis de Enseñanza, Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, Manta (2023).
- [34] A. Angel, O. Figueras y C. Valenzuela-García, en *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática*, editado por A. Castañeda (SOMIDEM Editorial, Ciudad de México, 2023).
- [35] M. Chilongo, L.E. Lezcano Rodríguez y E.M. Gibert Benítez, *Varona* **77**, 2151 (2023).
- [36] M.L.P. Alcázar, *Estrategias de enseñanza docente del curso de cálculo diferencial para estudiantes de ingeniería y la relación con su rendimiento académico*. Tesis de maestría, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima (2024).
- [37] R. Singh y S. Singh, *Education Research International* **1**, 1 (2019).
- [38] R. Cama Alejo, R. Mollinedo Chura, L. Vilca Callata, L. Vilca Mamani y N.S. Flores Fernandez, *Laccei* **1**, 337 (2024).
- [39] O. Uhden, R. Karam, M. Pietrocola y G. Pospiech, *Science & Education* **21**, 485 (2012).
- [40] J.Á. García Retana, *Revista Educación* **37**, 29 (2013).
- [41] F. Suárez-Carreño, L. Rosales-Romero, J. Salazar, P. Acosta-Vargas, H.F. Mendoza-Cedeño, H.E. Verde-Luján y O. Flor-Unda, *Appl. Sci.* **13**, 8852 (2023).
- [42] J. Salazar, L. Rosales-Romero y F. Suárez-Carreño, *Athenea Eng. Sci. J.* **5**, 7 (2024).
- [43] A.P. Lorandi Medina, G. Hermida Saba, J. Hernández Silva y E. Ladrón de Guevara Durán, *Revista Internacional de Educación en Ingeniería* **4**, 24 (2011).
- [44] G.C. Mera y A.B. Benarroch, *Enseñanza de las Ciencias Rev. Invest. Exp. Didáct.* **42**, 109 (2024).
- [45] F. Suárez-Carreño, L. Rosales-Romero y J. De La Paz-Ramos, *Migration Lett.* **20**, 324 (2023).
- [46] C.H. Edwards y D.E. Penney, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera: cómputo y modelado* (Pearson Educación, México, 2009).
- [47] R.K. Nagle, E.B. Saff y A.D. Snider, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (Pearson Educación, Naucalpan de Juárez, 2005).
- [48] S.C. Chapra y R.P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros* (McGraw-Hill, Santa Fe, 2006).
- [49] D.G. Zill y M. Cullen, *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera* (CENGAGE Learning, México, 2009).
- [50] M.N.O. Sadiku, *Elementos Del Electromagnetismo* (Reverté, Barcelona, 2003).
- [51] MAPLESOFT, *Maple Support Help (2024)*, disponible en: <https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/v10/updates%2Fv2024>.