
ARTÍCULO

La configuración de los vectores de una ética de orientación comunitaria y su repercusión en el surgimiento de generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas

The configuration of vectors in an ethics oriented towards community and its repercussion on the emergence of sophisticated arithmetic generalizations and algebraic generalizations

Liliana **Bayona** Sánchez *

 ORCID iD 0000-0001-6117-9997

Rodolfo **Vergel** **

 ORCID iD 0000-0002-0925-3982

Resumen

La incidencia de la interacción social con el otro en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes es un tema de interés actual para la investigación en educación matemática. Estudios en el campo han identificado diferentes formas de interacción social en el aula y sugieren profundizar en el problema sobre cómo estas inciden en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido y considerando la ética como la manera de relacionarse con el otro, el presente artículo aborda el análisis de la incidencia de los vectores de una ética de orientación comunitaria en los procesos de generalización que elaboran estudiantes de grado quinto de primaria, con edades de 10 y 11 años, de un colegio de Bogotá, Colombia. El estudio emplea como marco teórico la teoría de objetivación, como marco metodológico el análisis multimodal, y aporta evidencias empíricas que permiten establecer la incidencia de estos vectores en los procesos de generalización que realizan los estudiantes y en el tránsito a generalizaciones de nivel superior.

Palabras clave: Tipos de generalización. Pensamiento algebraico. Formas de interacción. Ética comunitaria.

Abstract

The role played by social interactions between individuals in the development of algebraic thinking amongst students is currently a topic of interest for research on mathematical education. Studies from the field have

* Doctora en Educación, Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia. Investigadora posdoctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD). Bogotá, Colombia. E-mail: lbayonas@educacionbogota.edu.co

** Doctor en Educación (UD). Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UD), Bogotá, Colombia. E-mail: rvergelc@udistrital.edu.co

identified different types of in-class social interaction, which suggest looking into how these affect the development of mathematical thinking among students. In this sense and considering ethics as a way to relate to other people, this article seeks to analyze the incidence of community-focused ethical vectors in the generalization processes conducted by 5th-grade students, aged 10 and 11, at a school in Bogotá, Colombia. As a theoretical framework, this study uses the objectification theory, and multimodal analysis as methodological frameworks, while also providing empirical evidence to ascertain the incidence of these vectors in the generalization processes conducted by students and in the transition towards higher-level generalizations.

Keywords: Types of generalization. Algebraic thinking. Forms of interaction. Community ethics.

1 Introducción

El desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad ha sido uno de los intereses de la investigación en educación matemática en los últimos veinte años. Estudios en el campo del álgebra temprana han establecido que la generalización, específicamente la de patrones, posibilita el surgimiento y el desarrollo del pensamiento algebraico en primaria (Barbosa; Vale, 2015; Radford, 2010, 2013, 2021a; Rojas; Vergel, 2014; Valenzuela; Gutiérrez, 2018; Vergel, 2015; Vergel; Rojas, 2018; Vergel; Radford; Rojas, 2022).

En esta línea del álgebra temprana y atendiendo a la investigación doctoral realizada por Bayona (2021a) y otros estudios realizados por Radford (2010, 2021a), Vergel (2015), Vergel *et al.* (2021) y Vergel, Radford y Rojas, (2022), se evidencia la existencia de tres distintos tipos de generalización elaborados por estudiantes de quinto de primaria con edades entre 10 y 11 años al abordar tareas de generalización de patrones. El primer tipo, corresponde a generalizaciones aritméticas, el segundo a generalizaciones aritméticas sofisticadas y el último a generalizaciones algebraicas. Dentro de las conclusiones del estudio de Bayona (2021a) se establece la importancia de seguir avanzando en la naturaleza de los tipos de generalización y de consolidar un conocimiento didáctico amplio que le permita al docente interpretar de manera adecuada las producciones que elaboran los estudiantes, y con esto posibilitar el desarrollo de su pensamiento algebraico, pero también se destaca la necesidad de analizar y discutir sobre la incidencia de las formas de relación con el otro en la elaboración de generalizaciones de nivel superior.

Si bien el estudio sobre la presencia de la ética en el aula de matemáticas ha sido abordado por otras investigaciones (Radford, 2016, 2021a, 2021b; Lasprilla, 2021), concibiendo la ética como forma de alteridad, como la manera de relacionarse con el otro, aún se requiere analizar el desarrollo de los vectores de la ética comunitaria y su incidencia en las formas de generalización de los estudiantes (Radford, 2021b). Se hace necesario entonces aportar evidencias empíricas sobre la ética y su repercusión en el desarrollo del pensamiento

algebraico de los estudiantes.

De esta manera y teniendo como marco la teoría de la objetivación (RADFORD, 2021a, 2021b), el artículo identifica los vectores de la ética comunitaria presentes en tres sesiones desarrolladas con estudiantes de grado quinto de primaria, con edades de 10 y 11 años, que participaron en la investigación de Bayona (2021a), y establece la incidencia de los vectores en la manera como evolucionaron los procesos de generalización que ellos elaboraron.

En la primera parte del documento se presentan algunos aspectos referidos a la teoría de la objetivación, particularmente sobre la actividad matemática de aula, la labor conjunta y la ética comunitaria. Posteriormente se hace referencia a los aspectos del marco metodológico de la investigación realizada, se aborda el análisis de tres sesiones desarrolladas con los estudiantes y se establecen las conclusiones del documento dejando a consideración del lector puntos de discusión para futuras investigaciones.

2 Marco teórico

La investigación realizada se fundamentó en la teoría de la objetivación propuesta por Radford¹ (2021a, 2021b), la cual tiene entre sus objetivos brindar un marco teórico sobre el aprendizaje y la enseñanza, concibiéndolo como un proceso histórico-cultural, y considerar a nivel pedagógico, condiciones que posibiliten un aprendizaje colectivo. De esta manera se destaca que, además de brindar los referentes teóricos para interpretar situaciones de aprendizaje, también motiva e invita al docente a la transformación de las prácticas pedagógicas, buscando configurar un aula en la cual se dé el encuentro con el saber, a partir del reconocimiento de singularidades, de otras voces, desde el encuentro colectivo.

Dentro de los fundamentos de la teoría de la objetivación se destaca el concepto de actividad. El conocimiento surge precisamente mediante una actividad colectiva que implica el encuentro con el otro y los otros, se trata entonces de un trabajo conjunto enmarcado en un enfoque profundamente social. Esta teoría considera la enseñanza y el aprendizaje como una sola actividad, una labor conjunta que involucra tanto al docente como a los estudiantes, en la cual trabajan juntos hacia la producción de una obra común; de ahí la importancia del encuentro, de posibilitar formas de interacción con el otro en el aula de clase.

¹ La teoría de la objetivación se caracteriza por proponer definiciones teóricas sobre saber, aprendizaje, procesos de objetivación y subjetivación, labor conjunta, actividad enseñanza -aprendizaje, entre otros aspectos. Estas definiciones teóricas y la misma naturaleza sociocultural de la teoría podrían o no coincidir con la perspectiva sobre educación matemática que tenga el lector, es una mirada que se asume de muchas otras posibles que hay en el campo.

Se coincide con Radford (2021b) en la necesidad de transitar de una ética de la obediencia a una ética emancipadora comunitaria. En la primera el docente se presenta a los estudiantes como portador de un saber, cuyo oficio es transmitirlo al estudiante, privilegiando los procesos homogéneos y las respuestas correctas o incorrectas, la segunda promueve espacios para el diálogo, el debate, la argumentación, busca la configuración de una labor conjunta entre el profesor y los estudiantes, fundamentada en la responsabilidad, en el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro.

Para precisar la dimensión de la ética comunitaria, Radford (2021b) propone tres vectores que pueden orientar la relación al otro dentro de la actividad matemática de aula: la responsabilidad, cuidado del otro y compromiso en el trabajo conjunto. Lasprilla (2021) establece componentes e indicadores para cada vector con el fin de identificar los vectores de la ética comunitaria en actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A continuación se presenta de manera breve y general la caracterización de cada vector y los componentes e indicadores de cada uno estos.²

La responsabilidad. Hace referencia a la conexión al vínculo con el otro, “se expresa en la respuesta que hacemos al llamado del otro” (Radford, 2021b, p.128). El vector responsabilidad se caracteriza desde la fragilidad humana, se trata entonces de ver mi fragilidad a través de la fragilidad del otro con el fin de comprenderlo y reconocer su singularidad. En este vector la responsabilidad es una relación asimétrica del yo con el otro, dando prioridad al otro que se tiene a cargo, soy responsable cuando estoy al servicio del otro, cuando cuido de él, cuando respondo al llamado que él me realiza. Los componentes asociados a este vector son la excedencia y la acogida (hacerse cargo) (Lasprilla, 2021). Los indicadores de estos componentes se presentan en el Cuadro 1:

COMPONENTE	INDICADOR
Excedencia	*Hacer frente a las dificultades *Muestra compromiso con el trabajo *Muestra responsabilidad por el otro, quedándose y escuchando sus ideas
Acogida (hacerse cargo)	*Se interesa por la comprensión o no de sus compañeros *Ofrece su ayuda *Se muestra dispuesto a atender a sus compañeros *Valora los esfuerzos de los demás y el propio

Cuadro 1 - Componentes e indicadores del vector responsabilidad
Fuente: Lasprilla (2021)

Los indicadores de cada componente tienen el propósito de hacer observable y visible el componente y por tanto el vector en el aula de clase.

²Para ampliar y profundizar en la caracterización de los vectores de la ética comunitaria y lo referido a los componentes e indicadores de cada vector ir a Radford (2021b), Lasprilla (2021).

El cuidado del otro. Este vector implica la sensibilidad de la atención y del reconocimiento del otro y de sus necesidades (Radford, 2021b, p. 129). Se caracteriza por considerar que el cuidado de sí implica inicialmente el cuidado y la preocupación por el otro, dando la posibilidad de vernos a nosotros mismos en el otro, de reconocer la vulnerabilidad propia y la del otro. En este vector se destaca la idea de socialidad establecida por Lévinas (2006) en la cual el acercamiento al otro se asume desde una relación entre personas pensantes, lo anterior implica considerar la inmanencia y el encuentro-diálogo como componentes de este vector (Lasprilla, 2021). Los indicadores de estos componentes se presentan en el Cuadro 2.

COMPONENTE	INDICADOR
Inmanencia	*Prevalece sobre el otro las ideas y pensamiento propios *Reconoce la existencia del otro, pero desde el yo creo, yo pienso, yo considero
Encuentro - diálogo	*Muestra respeto por lo que hacen o dicen los demás *Maneja con respeto y responsabilidad el poder *Es capaz de cambiar sus concepciones sobre sus habilidades y las de sus compañeros *Trata de atender una idea o acción propuesta por otro ^*Felicitas a otros por los aportes *Es capaz de sacar cosas positivas de experiencias y eventos difíciles

Cuadro 2 - Componentes e indicadores del vector cuidado del otro
 Fuente: Lasprilla (2021)

Compromiso en el trabajo conjunto. Este vector hace referencia a la promesa al compromiso de hacer todo lo posible en el trabajo conjunto que se da en el aula entre los estudiantes y el profesor, se trata de trabajar hombro a hombro (Radford, 2021b). Este trabajo conjunto exige que cada participante pueda expresar sus ideas, sus planteamientos, así como la comprensión o no de lo que se esté abordando en el aula. Más que llegar a acuerdos o verdades, se trata de reconocer, comprender y respetar la singularidad del otro (Lasprilla, 2021). Los componentes asociados a este vector son: la proximidad (empatía) y la exposición. Los indicadores de estos componentes se presentan en el Cuadro 3:

COMPONENTE	INDICADOR
Proximidad	*Muestra interés por estar al lado de otro por gusto propio *Les pide participación a los que no hablan mucho *Se muestra atento(a) a prestar ayuda a quien lo necesite *Usa una actitud positiva, motivando o animando a los compañeros
Exposición	*Propone abiertamente ideas y comprensiones *Maneja sus emociones para el desarrollo del trabajo en cooperación *Se pone en el lugar del compañero para apoyarlo y guiarlo

Cuadro 3 - Componentes e indicadores del vector compromiso en el trabajo conjunto
 Fuente: Lasprilla (2021)

Es importante mencionar que este tipo de actividad, en la cual surge la ética comunitaria y por tanto hay presencia de los tres vectores mencionados, debe ser configurada de manera intencional por el docente, pues no surge naturalmente; requiere de un conocimiento didáctico

amplio sobre la actividad.

La actividad en la teoría de la objetivación implica concebir la enseñanza y el aprendizaje como una única actividad, laborando juntos, maestro y estudiante, hacia la producción de una obra común que posibilite el encuentro del estudiante con el saber, un saber cultural e histórico. Desde esta perspectiva, la actividad (enseñanza-aprendizaje) en el aula, se concibe como una actividad humana, histórica y cultural, en la cual los signos, el lenguaje, y el cuerpo hacen parte de la actividad del sujeto y de su pensamiento, por tanto debe contemplar formas de producción de saberes en el aula, es decir, un trabajo colectivo entre maestro y estudiantes fundamentado en la historia y la cultura de los sujetos con el propósito de alcanzar, de manera gradual, niveles de conceptualización matemática. Así mismo, la actividad debe promover formas de colaboración humana y una ética comunitaria, dando apertura y espacio al encuentro con el otro, transformándose y aprendiendo juntos (Radford, 2021a).

Lo anterior implicó que la implementación de las tareas seleccionadas para la investigación se desarrollará en una actividad matemática (enseñanza-aprendizaje) de aula, atendiendo a las características que establece la teoría de la objetivación. Características que evidencian una postura específica de la educación matemática, de la enseñanza y del aprendizaje. Se trata de una actividad matemática de aula, la cual está orientada por los siguientes elementos:

- Generar espacios para que los estudiantes participen y escuchen; para que manifiesten su punto de vista y su opinión; y para que pregunten, argumenten y tomen postura a partir del encuentro con el otro.
- Reconocer y fomentar el respeto por la diversidad de los medios semióticos elaborados por cada estudiante, distanciarse de la perspectiva de esperar procedimientos similares y de la homogenización para dar apertura a la heterogeneidad.
- Fomentar espacios de participación de todos, entre docente y estudiantes, caracterizados por la apertura, por el respeto y cuidado hacia el otro, en términos de Radford (2021a), una ética comunitaria que permita el encuentro con el otro, transformándose y aprendiendo juntos.

Posiblemente seguir estas indicaciones para implementar las tareas pueda parecer fácil; no obstante, y atendiendo a la actividad matemática que se configuró para esta investigación, implicó una serie de retos. El socializar, por parte de los estudiantes sus respuestas y procedimientos y argumentarlos al parecer no son actividades frecuentes que se realicen en las clases. Algunos estudiantes en las primeras sesiones de aula se mostraron un poco temerosos de expresar lo que pensaban, posiblemente debido a la poca confianza en su conocimiento

matemático, en otros casos al ver sus producciones diferentes a las elaboradas por otros compañeros las borran o aunque realizan ciertas producciones preferían no mostrarlas a sus compañeros y dejar como evidencia solo las respuestas; en otros casos, se esperaba que el maestro brindara la verdadera respuesta de modo que concebían sus producciones en términos de juicios valorativos como respuestas correctas o incorrectas. Aspectos como los mencionados, posiblemente sugieren la importancia de fomentar una cultura de aprendizaje específica y distinta a la que podría ser fomentada en las clases de matemáticas actualmente, una cultura caracterizada por la noción de actividad matemática (enseñanza-aprendizaje) acorde a lo establecido en la teoría de la objetivación.

3 Marco metodológico

Teniendo en cuenta que el marco teórico de la investigación es la teoría de la objetivación, se empleó para el marco metodológico el análisis multimodal. Se contó con un marco teórico y metodológico de la educación matemática que se interesa por interpretar los procesos de comunicación e interacción que surgen en la actividad matemática de aula, contemplando todos aquellos recursos y signos que emplean los estudiantes para comunicar, realizar una acción y evidenciar un propósito (Radford, 2003, 2015).

En correspondencia a lo anterior la investigación contempló los recursos semióticos que emplearon los estudiantes presentes en las producciones escritas, verbales y gestuales que ellos elaboraron durante la actividad matemática de aula y las formas de interacción que emergieron entre los estudiantes y la docente, lo que implicó un análisis sensible, riguroso y detallado de la información recolectada desde una perspectiva multimodal.

La recolección de información se obtuvo de la actividad matemática de aula que se configuró para la cual se trabajaron cuatro tareas de secuencia de patrones seleccionadas para la investigación. Los participantes fueron ocho estudiantes de un colegio oficial de Bogotá Colombia, de grado quinto, con edades de 10 y 11 años.

La elección del grado de escolaridad se realizó atendiendo a los referentes de actualización curricular de Colombia, específicamente en correspondencia a los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas (MEN, 2016), los cuales establecen para el grado quinto de primaria el trabajo de generalizaciones aritméticas y algebraicas.

Las principales razones que definieron el número de participantes corresponden a la cantidad de información que proviene de cada uno de ellos, el trabajo sensible, detallado y exhaustivo que implica realizar un análisis multimodal, contemplando las producciones

escritas, verbales y gestuales de los estudiantes desde el reconocimiento de la singularidad y las formas de interacción que emergieron en el aula.

Para la elaboración de este artículo se seleccionaron las producciones elaboradas por tres de los ocho estudiantes participantes y tres sesiones de clase de las 30 realizadas, la anterior decisión atiende a la riqueza y diversidad de sus producciones y a las formas de interacción que surgieron entre ellos y la profesora en esas tres sesiones específicas. La profesora que orientó las sesiones fue la investigadora principal del estudio, quien es docente de matemáticas y cuenta con conocimiento didáctico en álgebra en primaria, generalización de patrones, tipos de generalización y teoría de la objetivación.

De las cuatro tareas de generalización de patrones que se implementaron en la investigación para el presente artículo se seleccionó la cuarta. Esta tarea se trabajó en las últimas sesiones realizadas por tanto ya se habían configurado aspectos de la actividad matemática de aula, fue por esta razón que fue considerada para el análisis que se presenta en este documento.

Las sesiones se desarrollaron durante el primer semestre del año 2020, momento en el cual a nivel mundial se estaba viviendo la pandemia del Covid 19. En Colombia, más específicamente en Bogotá ciudad en la cual se desarrollaron las sesiones con los estudiantes, esta pandemia tuvo diversas implicaciones en el sector educativo. A partir del mes de marzo de 2020 el Ministerio de Educación Nacional y la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá³ implementaron la estrategia Aprende en Casa la cual implicó fortalecer el hogar como un ambiente de aprendizaje y dar continuidad así, al servicio educativo en el marco de la emergencia sanitaria. Los estudiantes debían continuar su proceso de formación desde sus hogares y no de manera presencial en el establecimiento educativo. Atendiendo a esta nueva realidad y al momento histórico en el cual se implementó la investigación, la actividad con los estudiantes fue desarrollada a través de sesiones virtuales, empleando la plataforma zoom.

Lo anterior implicó establecer acuerdos con los estudiantes en cuanto a compromisos que favorecieran la recolección adecuada de información. Por ejemplo, mantener su cámara prendida, micrófono habilitado, mostrar sus rostro, sus manos, sus producciones escritas, pero lo que se percibía como una dificultad se convirtió en una oportunidad, posterior a las primeras sesiones realizadas los estudiantes se mostraban cómodos, tranquilos, motivados, no solo cumplían con los acuerdos establecidos se esmeraban porque sus compañeros y la docente pudieran ver sus producciones de la manera más clara posible, pudieran ver su rostro, empleaban sus manos, sus dedos, para explicar sus posicionamientos, participaban y escuchaban al otro.

³ Según circular 6, del 17 de marzo de 2020, expedida por la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá.

Es importante aclarar que el análisis que se presenta en este artículo no pretende generalizar las conclusiones que se establecieron en este contexto específico, con este grupo de estudiantes, en estas condiciones particulares a otros escenarios a otras realidades. El propósito es brindar a los docentes e investigadores miradas posiblemente distintas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que les permita reflexionar sobre sus prácticas pedagógicas, transformarlas y ver el aula como un lugar, en términos de Radford (2021b), en el que los estudiantes puedan encontrarse con saberes culturales y voces diferentes, con la experiencia de la vida colectiva, solidaria, plural e inclusiva.

El desarrollo de las sesiones buscó configurar de manera gradual una actividad matemática de aula atendiendo a lo establecido por la teoría de la objetivación. Las sesiones brindaron los espacios para el diálogo, para los cuestionamientos entre los estudiantes y la docente, además posibilitaron darle la confianza al estudiante para preguntar y manifestar su punto de vista, promoviendo el escuchar al otro, el encuentro con el otro, formas de interacción fundamentadas precisamente en el respeto por la diferencia, transitando de respuestas únicas y procesos homogéneos esperados por la docente, al reconocimiento y la valoración de la singularidad.

Para la recolección y el análisis de la información, se contemplaron cuatro fases articuladas atendiendo a lo propuesto en Miranda, Radford y Guzmán (2007), Radford (2015) y Vergel (2015), las cuales se describen a continuación de manera breve.

La primera fase corresponde a la grabación de video y audio de la actividad matemática implementada la cual fue desarrollada a través de 30 sesiones, cada sesión de 60 minutos. Adicionalmente se contó con la grabación de 32 videos individuales de los estudiantes, en los cuales ellos explicaban sus procedimientos frente a una parte específica de la tarea propuesta.

La segunda fase corresponde a la recolección de las hojas de trabajo, para la cual cada estudiante desarrolló la tarea propuesta en su cuaderno y se realizó un registro fotográfico de estas, en total se recolectaron 125 hojas de trabajo.

La tercera fase correspondió a la observación y transcripción de los videos de las sesiones de trabajo y de los individuales.

La cuarta al análisis de la información derivada de la observación y la participación en la actividad de aula, de las hojas de trabajo del estudiante y de los videos, con el fin de identificar e interpretar en los gestos, en la corporeidad, en la oralidad, en los registros escritos y en general en las producciones de los estudiantes, los diversos recursos semióticos presentes en los procesos de generalización que ellos elaboran y de manera simultanea identificar la presencia de los vectores de la ética comunitaria y su incidencia en los procesos de generalización que se

configuraron. Lo anterior implicó la triangulación de la información recolectada desde un análisis sensible, detallado, y exhaustivo tanto de los procesos de generalización que surgieron como de las formas de interacción que emergieron en el aula.

4 Resultados y discusión

Para el análisis fueron seleccionados cinco momentos secuenciales de la actividad matemática, en los cuales precisamente se observó evolución en la configuración de una ética de orientación comunitaria y aspectos que evidencian la incidencia de la misma en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. En cada uno de estos se identificó componentes asociados a los vectores, según aportes de Lasprilla (2021) y Radford (2021b). Sin embargo, los componentes que fueron visibles o identificables con mayor claridad en cada segmento no necesariamente corresponden a un mismo vector. Es así que el análisis que se presenta a continuación más allá de indicar la presencia de un vector evidencia la integridad que hay entre los tres y entre sus diferentes componentes, se trata entonces de verlos dialecticamente, como unidad (Radford, 2021b).

En la sesión número 25 se propuso a los estudiantes la siguiente tarea:

Ahora tienes la siguiente secuencia de números, en la cual el número 2 corresponde a la posición 1, el número 5 a la posición 2, el 8 a la posición 3 y así sucesivamente:		
2	5	8
Posición 1.	Posición 2.	Posición 3.

Figura 1- Tarea secuencia numérica apoyada por representación tabular
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

Se propone por primera vez a los estudiantes el trabajo de tareas de secuencias numéricas, teniendo en cuenta que en las sesiones anteriores se habían trabajado tareas de secuencias figurales. Las tareas de secuencias figurales se caracterizan por mostrar el valor de cada término por medio de figuras que a partir de su observación facilitan el surgimiento de los procesos de generalización de los estudiantes, mientras que las numéricas solo muestran el valor del término en número, lo cual implica un grado de dificultad mayor respecto a los procesos de generalización que puedan emerger en el aula.

En la introducción de esta sesión la profesora P1 invita a desarrollar una tarea que tiene características diversas a las trabajadas previamente, en este caso, ya no se cuenta con la figura de cada posición solo con el número que le corresponde a la misma. La primera pregunta de la tarea fue: ¿cuál es el número que le corresponde a la posición 4?, explica el procedimiento que

realizaste para llegar a la respuesta, al respecto los estudiantes afirman:

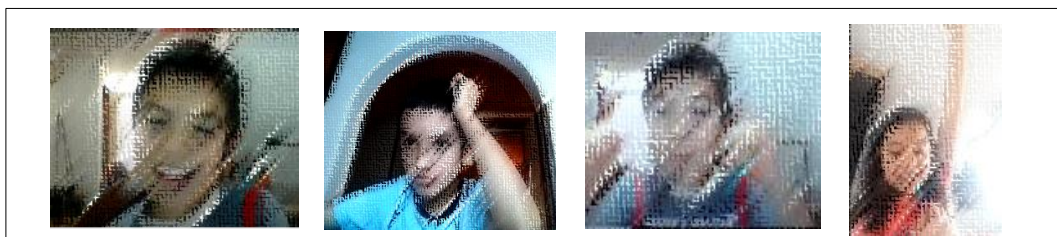


Figura 2 - Producciones estudiante E5, E6 y E7
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E6: ya sé cómo, ya sé cómo [para este momento, dos de los tres estudiantes estaban vinculados con la tarea, comprendían lo que la tarea les proponía, sin embargo, para el estudiante E5 el proceso era distinto]

P1: ... ¿cómo te fue? [Le pregunta la profesora al estudiante E5]

E5: no, es que no entiendo

E6: yo sí

P1: no te preocupes, ven lo trabajamos. Mira en la posición 1 el número es el 2 no hay figuritas solo el número, en la posición 2 el número es el 5 ya no hay figuritas simplemente nos dan el número y en la posición 3 el número es el 8, ¿será que podemos identificar cuál número le corresponde a la posición 4?

E6: ¡Eh! Bueno, dice acá, pues lo que yo entendí acá es que el número de la posición 4 es 11 ¿Por qué? Porque yo me di cuenta que en la secuencia se le suman 3, del 2 al 5 hay 3, porque 2 más 3 es 5

E7: yo, yo, yo también estuve analizando que es sumando 3 porque 2 más 3 son 5, que es la cantidad de la posición 2, 5 más 3 son 8 la cantidad de la posición 3, 8 más 3 es 11 que es la cantidad de la posición 4.

(Diálogo entre estudiantes E5, E6, E7 y profesora P1, Bayona, 2021a).

La profesora observa el comportamiento de E5, su intervención y sus gestos, su mano sobre la cabeza, su mirada hacia abajo, evidencian que se siente confuso que no logra vincularse a lo propuesto por la tarea. Cuando el estudiante E5 manifiesta que no entiende se expone frente a sus compañeros y profesora, posiblemente con la intención de que el otro o los otros le brinden ayuda, de que respondan a su intervención, al llamado en términos de Radford (2021b) que él está realizando.

Efectivamente en correspondencia a esa exposición del yo, de manifestar *no entiendo*, emerge una respuesta por parte de los otros. Si bien inicialmente la profesora acude al llamado que él realiza posteriormente sus compañeros también lo hacen.

Las intervenciones de sus compañeros y la escucha por parte del estudiante E5 de lo que ellos proponen, le ayuda a comprender mejor la pregunta propuesta. No solo la respuesta a la misma, sino también el proceso que realizaron sus compañeros.

En este primer momento de la actividad matemática desarrollada, se privilegia la presencia del vector responsabilidad con el componente excedencia y acogida, el vector compromiso en el trabajo conjunto con el componente exposición, y el vector cuidado del otro con el componente encuentro – diálogo, como se relaciona en el Cuadro 4.

VECTOR	COMPONENTE	INDICADOR
Responsabilidad	*Excedencia -Acogida	*Hace frente a las dificultades *Muestra compromiso con el trabajo -Se muestra dispuesto a atender a sus compañeros -Se interesa por la comprensión o no de los compañeros
Cuidado del otro	-Encuentro - diálogo	-Muestra respeto por lo que hacen y dicen los demás -Trata de entender una idea o acción propuesta por el otro
Compromiso con el trabajo conjunto	*Exposición	*Propone abiertamente ideas y las explica <u>evidenciando esfuerzo para poderlas dar a conocer al otro con claridad</u>

Cuadro 4 – vectores de la ética comunitaria identificados en la actividad matemática de aula, primer momento.
Fuente: datos tomados de Bayona (2021a) y aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b), análisis realizado por Bayona y Vergel (2023)

Respecto al componente excedencia, el estudiante E5 hace frente a la dificultad presentada la asume, aunque no comprendió de manera inicial la actividad permanece en la sesión escuchando a sus compañeros. Él y sus compañeros manifiestan compromiso con el trabajo propuesto y responsabilidad con el otro, se logra reconocer la manera cómo cada uno asume lo propuesto por la tarea. Un elemento adicional es la manera en que el estudiante E5 asume el reto de vincularse a la actividad, sorteando en este caso, que él era el único que no entendía, viendo en sus compañeros la emoción de comprender lo propuesto, un momento que podría encasillarse como frustrante para él, pero por el contrario se convierte en un escenario que le permite llegar a procesos de generalización de nivel superior, lo cual será objeto de discusión en los siguientes apartados del documento.

Los componentes exposición y acogida se hacen explícitos a través de la respuesta que realiza la docente y los compañeros al llamado que realiza el estudiante E5, él manifestaba a los otros la necesidad de vincularlo a la tarea, de dar una explicación distinta a lo que proponía la primera pregunta de la misma, de socializar la respuesta de la manera más clara posible, buscando no solo responderla; el objetivo fue brindarle al estudiante E5 mayores elementos que le permitieran una mejor comprensión de lo propuesto por la tarea.

Así mismo nuevamente el componente exposición y ahora el componente encuentro - diálogo, explícitos en los espacios de socialización de procedimientos y respuestas, espacios también para escuchar y reconocer la singularidad; aprender a través del otro, de lo que dice. Lo que lleva a un diálogo que permite pasar del juzgar al reconocer y valorar lo que hacen los demás. También se evidencia el esfuerzo de cada estudiante, tanto por vincularse con lo que propone con la tarea, como por expresarse de manera verbal (en este momento) de forma clara y detallada sus ideas, sus procesos y también de manera simultánea manifestar sus dudas e inquietudes.

En un segundo momento se propuso a los estudiantes la pregunta 2 de la tarea: ¿cuáles son los números correspondientes a las siguientes posiciones: 5, 6, 7, 10 y 12? La relación que establece el estudiante E5 es aumentar tres para determinar el número que le corresponde a cada posición solicitada, cuando socializa su respuesta dice:

[...] la 5 es 14, la 6 es 17, la 7 es la 20, la 10 es 23 y la 12 es 26.
 (Respuesta de E5, 2021a).

Cuando determina el número de la posición 10 trabaja a partir de la posición 7 sin contemplar la 8 y la 9, lo mismo sucede con la posición 12. Situación que es identificada y verificada por sus compañeros, quienes indican que los resultados del estudiante E5 son diferentes a los de ellos.

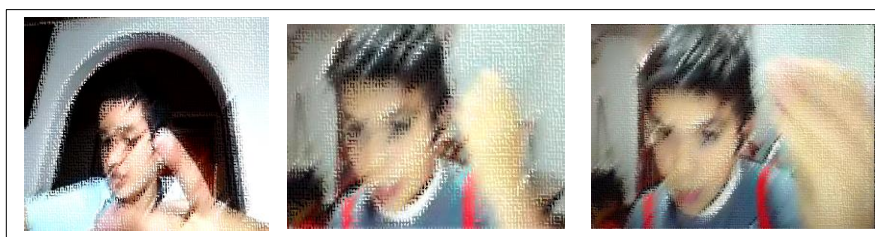


Figura 3 - Producciones estudiante E5 y E6
 Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E5: la 10 es la 23 y la 12 es la 26

E6: no, no, no, no, ahí si no, en la 10 si está mal, está mal, está mal porque para un número no es la cantidad porque ese 23 que dijo es de la posición 8 estamos hablando de la posición 10, da diferente.

E7: sí... ¿Profe puedo seguir yo?

E5: profe, me puedes compartir pantalla, por favor

P1: claro que sí, ya te comparto

E5: profe es que mire solo aparecen la 5, la 6, la 7, la 10 y la 12, solo aparecen esas y yo las hice, pero el compañero (E7) está diciendo que se debe hacer la 8 y la 9 y la 11...

E5: pero profe mire en la 7 dice 20 y en la 10 es 29 ¿por qué? si estamos haciendo de 3 en 3 no da al 9.

E6: no es que usted no entiende, vea para no hacer 8 y 9 se le van sumando los 3 calculando solo 3, 3 y 3 hasta llegar a la 10 y así llegamos a la cantidad [levantando su mano izquierda y moviéndola hacia arriba y hacia abajo tres veces].

(Diálogo entre estudiantes E5, E6, E7 y profesora P1, Bayona, 2021a).

Se inicia así un proceso de verificación por parte del estudiante E5 que se deriva de la interacción con el otro, del reconocimiento de otros puntos de vista de la socialización y el debate. Es un trabajo conjunto entre el docente y los estudiantes que, para este caso, le permitió al estudiante E5 la verificación del proceso que realizó y modificar su producción escrita como se verifica en la siguiente figura.

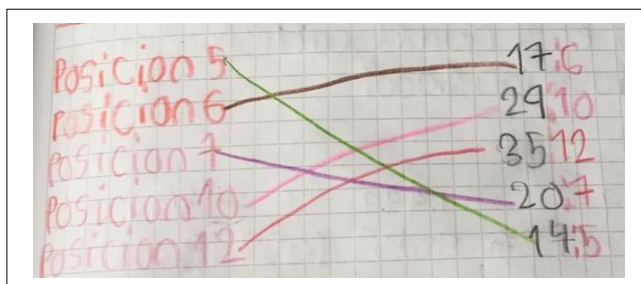


Figura 4 - Producción estudiante E5 posiciones 5, 6, 7, 10 y 12
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

Escuchar al otro, preguntarle sobre lo que socializa, verificar las producciones propias a partir del reconocimiento y el respeto por las producciones de los demás compañeros, modificarlas si es el caso, permite evidenciar como la interacción con el otro posibilita la transformación del saber. Tal como lo indica Bayona (2021b) en este caso esta interacción le permitió establecer los siguientes elementos al estudiante:

- La correspondencia entre el término y su valor.
- Tener en cuenta los términos y los valores correspondientes que están entre el último trabajado y el solicitado.
- Generalizar la característica identificada en los términos solicitados, en este caso aumentar de un término a otro 3.

Los tres elementos mencionados son de gran importancia en el proceso de generalización que realiza el estudiante E5 y por tanto en el desarrollo del pensamiento algebraico. Si bien para este instante se está configurando una generalización aritmética, la misma es de gran relevancia. Por una parte es un tipo de generalización que implica una serie de procesos por parte del estudiante que no están dados y deben configurarse y, por otra, posibilita el tránsito a generalizaciones de nivel superior particularmente en tareas de generalización de patrones que son de tipo numérico y que por tanto su abordaje implica una mayor complejidad para el estudiante.

Respecto a los vectores de la ética comunitaria se privilegian los siguientes componentes de los tres vectores (Cuadro 5):

VECTOR	COMPONENTE	INDICADOR
Responsabilidad	*Excedencia -Acogida	*Hace frente a las dificultades *Muestra compromiso con el trabajo -Se muestra dispuesto a atender a sus compañeros -Se interesa por la comprensión o no de los compañeros
Cuidado del otro	-Encuentro - diálogo	-Muestra respeto por lo que hacen y dicen los demás -Trata de entender una idea o acción propuesta por el otro
Compromiso con el trabajo conjunto	*Exposición	*Propone abiertamente ideas y las explica <u>evidenciando esfuerzo para poderlas dar a conocer al otro con claridad</u>

Cuadro 5 - Vectores de la ética comunitaria identificados en la actividad matemática de aula, segundo momento
Fuente: datos tomados de Bayona (2021a) y aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b), análisis realizado por Bayona y Vergel (2023)

La excedencia, componente del vector responsabilidad, cuando el estudiante E5 hace frente a la dificultad, si bien sus compañeros le indican que los resultados que comparten no corresponden busca exponer su punto de vista, socializarlo y permitir la discusión respecto a lo que él elaboró. La responsabilidad por el otro, escuchando las ideas de sus compañeros y lo que piensan respecto a sus argumentos. Así mismo la presencia del componente acogida, el interés por la comprensión del compañero la posibilidad de transformar el saber en este caso evolucionar respecto al proceso de generalización que realiza el estudiante E5.

El vector cuidado del otro, con el componente encuentro – diálogo, así como el vector compromiso con el trabajo conjunto, con el componente exposición, también son identificados en este momento de la actividad. Si bien el estudiante E5 consideraba de manera inicial que sus producciones eran adecuadas, surge el encuentro - el diálogo. Momento caracterizado no solo por la decisión de socializar a sus compañeros su posicionamiento frente a la tarea, también por el interés de querer entender lo que decían y, a partir de ello, reconsiderar sus producciones, desde otras voces y puntos de vista. De manera articulada el componente exposición, contemplado en dos aspectos. Por una parte la comodidad y confianza que tiene cada estudiante en proponer abiertamente sus ideas a los otros, con ello se hace referencia tanto a los demás compañeros como a la docente y, por otra parte, el esfuerzo que realiza cada uno por darlas a conocer con claridad. En sus intervenciones se preguntan, afirman, debaten, incluyen y discuten respecto a lo que el otro dice. Si bien la docente interviene, son ellos los que validan el saber, un saber que se transforma y que le permite particularmente al estudiante E5 transitar a generalizaciones de nivel superior como se indicará posteriormente.

En un tercer momento de la actividad, se propuso la tercera pregunta: ¿cuál es el número que le corresponde a la posición 25?, una posición un poco más lejana a las trabajadas en la segunda pregunta. Al respecto el estudiante E7 interviene en la sesión y realiza las siguientes

producciones:

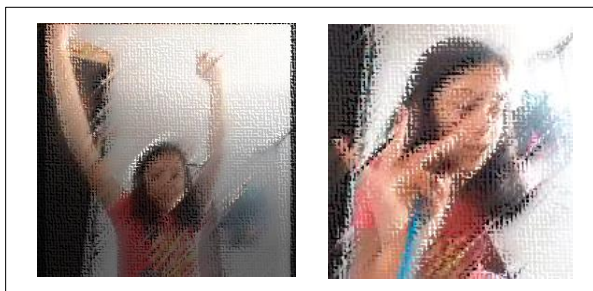


Figura 5 - Producción estudiante E7
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E7: yo profe, yo

P1: listo

E7: bueno profe, como para no hacer 10 posiciones entonces yo dije: de 15 a 25 son 10 entonces ese 10 lo multipliqué por 3 y saldrían 30 ¿Sí? entonces 44 más 30 me dio 74

P1: ¿Nos puedes explicar otra vez? el procedimiento

E7: digamos que con nuestros dedos 15 y 25 15 16 17 18 19 20

21, 22, 23, 24, 25, son 10 entonces ese 10 lo multipliqué por 3 en mi mente entonces me dio 30, 44 más 30 serían 74

P1: bien ¿44 es el número de quién?

E7: de la posición 15

P1: ya entendí gracias, porque no había entendido muchas gracias, y ¿tú como lo hiciste?

E6: igual, es decir como dijo ella⁴, había una cantidad grandísima entonces la repetía la repetía porque yo sumaba 3 más 3 para no hacer más posiciones entonces yo sumaba 3 más 3 a las posiciones hasta 74 que me dio

P1: bueno o sea estás de acuerdo con el resultado de ella, ¿sí? y ¿a ti cuanto te dio? (le pregunta al estudiante E5)

E5: pues profe a mí no me dio yo estaba pensando cual era entonces estaba sumando igual que él⁵ y cuando ella⁶ respondió ahí yo me di cuenta cual era el número.

(Diálogo entre estudiantes E5, E6, E7 y profesora P1, Bayona, 2021a).

El proceso de generalización que realiza el estudiante E7 se caracteriza por establecer el valor del término solicitado, si bien a partir de un término conocido no necesariamente el anterior, correspondiendo a un tipo de generalización aritmética sofisticada⁷ y al esquema operacional establecido por Vergel (2015): $Ta + (n - a) \times 3 = Tn$. Siendo en este caso Ta el valor del término conocido, es decir 44 de la posición 15, $n - a$ la diferencia entre el término solicitado y el término conocido, en este caso $25 - 15 = 10$, y 3 que es la característica identificada, aumentar de 3 en 3 de un término al siguiente.

Nótese que la profesora fue quién le preguntó al estudiante E7 una explicación más detallada del proceso, podría percibirse de manera inicial que los demás estudiantes participantes E5 y E6 estarían poco atentos a la explicación realizada, ya que ellos no habían

⁴ Dice el nombre de su compañera, estudiante E7

⁵ Dice el nombre del estudiante E6

⁶ Dice el nombre del estudiante E7

⁷ Para ampliar sobre la naturaleza de las generalizaciones aritméticas sofisticadas se puede consultar Bayona (2021a) y Vergel (2015).

preguntado al respecto, no era de su interés. Sin embargo, la presencia de la ética comunitaria en la actividad matemática de aula, evidencia la gran incidencia en el proceso de generalización que elaboró posteriormente el estudiante E5 en virtud de la explicación realizada por su compañera E7.

Para la siguiente sesión se le propone a los estudiantes establecer el número que le corresponde a la posición 100, y se deja como opcional establecer el número que le corresponde a la posición 500 y el número de la posición 1000. Al respecto el estudiante E6 indica que le llevará mucho tiempo trabajar esas posiciones *todo el día hacer la 100* (entre risas), sin embargo, el estudiante E5 afirma que hará las tres.

Respecto a los vectores de la ética comunitaria se privilegian los siguientes componentes de los tres vectores (Cuadro 6):

VECTOR	COMPONENTE	INDICADOR
Responsabilidad	*Excedencia -Acogida	*Muestra compromiso con el trabajo *Muestra responsabilidad con el otro, escuchando sus ideas -Valora el esfuerzo de los demás y el propio
Cuidado del otro	*Inmanencia -Encuentro - diálogo	*Reconoce la existencia del otro -Muestra respeto por lo que hacen y dicen los demás -Trata de entender una idea o acción propuesta por el otro
Compromiso con el trabajo conjunto	*Exposición	*Propone abiertamente ideas y las explica <u>evidenciando</u> <u>esfuerzo para poderlas dar a conocer al otro con claridad</u>

Cuadro 6 - Vectores de la ética comunitaria identificados en la actividad matemática de aula, tercer momento
Fuente: datos tomados de Bayona (2021a) y aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b), análisis realizado por Bayona y Vergel (2023)

El componente excedencia, del vector responsabilidad, se evidencia en el compromiso con el trabajo propuesto, los estudiantes atienden con dedicación a lo que se propone en este momento en la tarea, también responsabilidad con el otro, escuchan las intervenciones, las explicaciones del otro y las respuestas a las inquietudes realizadas tanto por ellos como por otro compañero, en este caso por la docente. Además, el componente acogida presente al valorar el esfuerzo realizado por los demás, en este caso el proceso realizado por el estudiante E7 quien les brinda mayor claridad frente a lo que propone la tarea.

Así mismo, se destaca el reconocimiento del otro que para este caso trasciende del yo creo o yo hago, a expresiones: *como dijo ella, cuando respondió ella* (refiriéndose a lo que expresó la compañera), los componentes encuentro-diálogo y exposición que se evidencia en ese encuentro con el otro, en la labor conjunta establecida. Es un dialogo en el cual se destaca la escucha y la intención de comprender lo que dice el compañero, más que de manifestar lo que cada uno había realizado frente a la tarea propuesta. La explicación clara que realiza la estudiante E7 de su proceso, buscando no solo expresar sus ideas también presentar de forma comprensible sus planteamientos a los compañeros y a la docente. La tranquilidad y la

comodidad de participar, de sentirse seguros de que la diferencia será además de reconocida, valorada y respetada.

En un cuarto momento, correspondiente a la siguiente sesión con el grupo de estudiantes, se propone socializar lo que trabajaron sobre la posición 100, 500 y 1000, al respecto el estudiante E5 realiza las siguientes producciones.

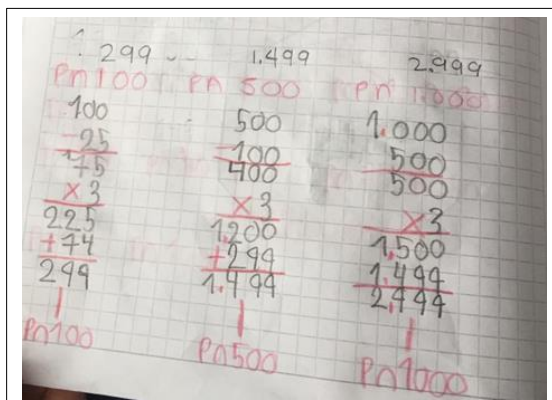


Figura 6 - Producciones elaboradas por el estudiante E5, posiciones: 100 y 500
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E5: Acá estoy haciendo de las tres actividades de la tarea que yo prometí hacer: la de la 100, la de la 500 y la de 1.000.

Acá está la de 100, la... la de 100 la hice con una multiplicación como hizo mi compañera⁸ cuando hicimos la posición 25. Así que, acá están las respuestas y ya las explico. Así que en la posición 100 le resté 25, de la posición anterior; y luego me dio 75; y luego le multipliqué 3 porque estamos haciendo de 3 en 3.

Luego me dio 225 y le sumé 74. Y ¿dónde salió ese número?, pues de la... de la respuesta de la posición 25, de acá. Así que, cuando se la sumé me dio 299. Luego, hice la 500 con la... posición 100. Mire, acá, voy a hacer... voy a explicarle, espere, que en la posición 500... le resté 100 y me dio 400; y luego le multipliqué 3 y me dio... 1200. Y luego, con la respuesta de la posición 100, acá; 299, le sumé y me dio 1.499, y así.

(Diálogo estudiante E5, Bayona, 2021a).

Si bien de la producción escrita se pueden realizar diversos análisis, lo que se enfatiza para este documento respecto al proceso de generalización elaborado son los siguientes aspectos:

- Configuración de una generalización aritmética sofisticada, se establece el valor del término solicitado a partir de un término conocido, no necesariamente el anterior, que para este caso y tomando como referencia el caso de la posición 500: la diferencia entre el término solicitado y el término conocido que emplea, $500 - 100 = 400$; esta diferencia se multiplica por 3, la característica común identificada, finalmente suma el resultado obtenido con el valor del término conocido, $1200 + 299$.

- La explicación que realizó su compañera, la estudiante E7, incidió en el proceso de

⁸ Dice el nombre de la estudiante E7.

generalización que configuró el estudiante E5. Si bien su compañera trabajó en casos cercanos un proceso similar, el estudiante E5 se apropió de los medios semióticos de objetivación de su compañera y trabajo con solidez y seguridad casos lejanos, transitando a un proceso de generalización superior en este caso de una generalización aritmética a una generalización aritmética sofisticada. Aplicar este proceso en casos cercanos no implicaba necesariamente poder emplearlo en casos lejanos. Para discutir sobre esto último, se presenta a continuación la producción elaborada por la estudiante E7 de la posición 100.

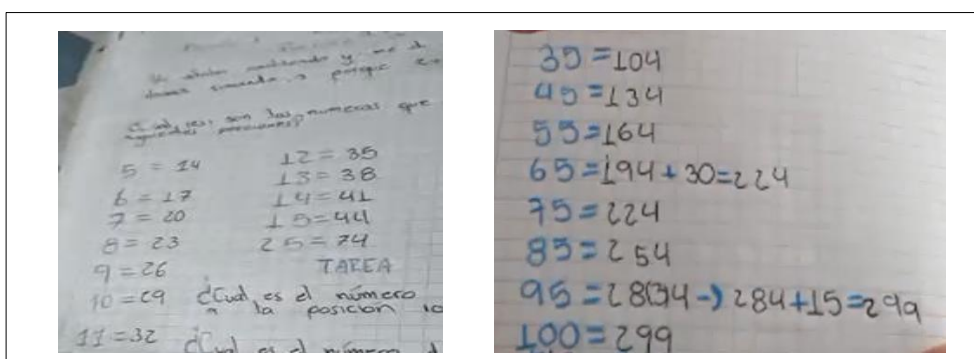


Figura 7 - Producciones elaboradas por estudiante E7, posición 100

Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E7: Bueno el número correspondiente a la posición 100. Dándome cuenta que voy de 10 en 10, lo voy a realizar. Entonces voy de la 25 (la última posición que fue trabajada) a la 35. Sería entonces 74 más 30 sería 104. Ahora 45, 55, 65, 75, 85, 95, y 100, ahí solo me salto 5. Ahora 104 más 30 sería 134, 134 más 30 sería 164, 164 más 30 sería 194, vamos con la posición 75, 194 más 30 vamos a sumarlo entonces... sería 224, 224 más 30 sería 254, 254 más 30 sería 283, ¡ay! perdón (entre risas) ponemos paréntesis y ponemos el 4 es 284, y entonces saltamos solo cinco y sería 284 más 15, sería, espera... 299 [refiriéndose al valor de la posición 100]. (Diálogo estudiante E7, Bayona 1, 2021a)

La estudiante E7 para establecer la posición 25 elaboró el proceso descrito en el apartado anterior, en el momento tres. No obstante, para establecer el número que le corresponde a la posición 100 estableció que: de la 25 a la 35 aumenta 10 posiciones, luego tiene la certeza que al aumentar 10 posiciones el valor de la posición aumenta 30⁹, lo cual suma al valor del último término trabajado, es decir 74 más 30, por tanto el número que le corresponde a la posición 35 es 104, y suma de 10 en 10 las posiciones hasta llegar a la posición 100, como llega a la 95 debe sumar solo 5 para llegar a la posición 100. Si bien obtiene como resultado el valor correspondiente su proceso es distinto al estudiante E5, requiere necesariamente el trabajo de 10 en 10. Dos procesos de generalización que si bien comparten características comunes tienen niveles de complejidad distintos.

⁹ Ver el extracto del diálogo de la estudiante E7 respecto a la multiplicación de 10 por 3; E7: *digamos que con nuestros dedos 15 y 25 15 16 17 18 19 20, 21, 22, 23, 24, 25, son 10 entonces ese 10 lo multipliqué por 3 en mi mente entonces me dio 30.*

Este proceso de poder transitar a niveles de generalización superior, a partir de la interacción con el otro se posibilita precisamente por la actividad matemática configurada con los estudiantes y por la presencia de vectores de la ética comunitaria, los cuales se relacionan en el Cuadro 7.

VECTOR	COMPONENTE	INDICADOR
Responsabilidad	*Excedencia -Acogida	*Muestra compromiso con el trabajo *Muestra responsabilidad con el otro, escuchando sus ideas -Valora el esfuerzo de los demás y el propio
Cuidado del otro	*Inmanencia -Encuentro - diálogo	*Reconoce la existencia del otro -Muestra respeto por lo que hacen y dicen los demás -Trata de entender una idea o acción propuesta por el otro
Compromiso con el trabajo conjunto	*Exposición	*Propone abiertamente ideas y las explica <u>evidenciando esfuerzo para poderlas dar a conocer al otro con claridad</u>

Cuadro 7 - Vectores de la ética comunitaria identificados en la actividad matemática de aula, cuarto momento
Fuente: datos tomados de Bayona (2021a) y aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b), análisis realizado por Bayona y Vergel (2023)

La responsabilidad mediante el gran compromiso con el trabajo propuesto, el escuchar al otro y querer realmente comprender lo que dice, valorar el esfuerzo propio y de los demás, caracteriza este momento de la actividad.

Reconocer la existencia del otro y el cómo otras voces pueden posibilitar nuevos puntos de vista, nuevas formas de ver la tarea propuesta y de resolverla, posibilitando, a través de la relación con el otro, la transformación del saber.

El compromiso con el trabajo conjunto evidenciable cuando los estudiantes proponen abiertamente sus ideas y precisamente algo para incluir en el indicador, es que se esfuercen por darlas a conocer con claridad, con el mayor detalle posible, de tal manera que sean comprensibles para la docente, pero especialmente para sus compañeros; este último elemento también se resalta en este momento de la actividad, el interés se centra en trabajar juntos, el objetivo trasciende de elaborar producciones pensando que quien las escucha, las lee o las interpreta es solo el docente, el encuentro-diálogo es con todos; por ello se habla de una labor conjunta, en la que todos los participantes son incluidos y tenidos en cuenta.

En un quinto momento de la actividad y retomando la producción de la estudiante E7 presentada en la Figura 7, se evidencia que si bien acudió a una generalización con naturaleza aritmética sofisticada, el poco dominio de la misma al abordar términos lejanos como la posición 100, la complejidad del proceso además del trabajo colectivo realizado con sus compañeros y la profesora, le posibilitó contemplar otro tipo de características en la tarea presentada elaborando en un momento posterior de la actividad matemática las siguientes producciones.

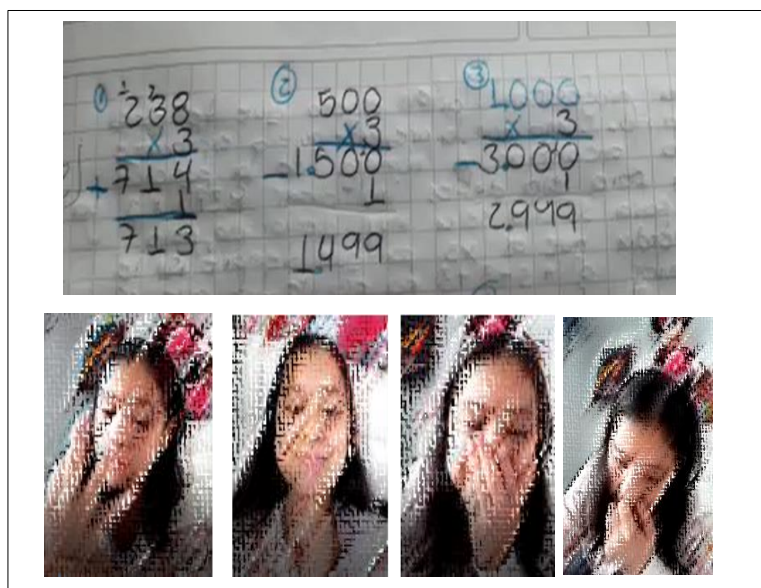


Figura 8 - Producciones estudiante E7, posiciones 238 y 500
Fuente: datos de investigación tomados de Bayona (2021a)

E7: para la posición 238 yo me di cuenta que en la secuencia era importante la posición, porque con esta podía establecer el resultado, entonces 238 lo tengo tres veces, profe lo multipliqué por 3, sería el triple y me dio 714 pero se le debe restar uno y nos da 713.

P1: ... que interesante, ¿cómo llegaste a ese proceso?

E7: ... pues mira profe, es que me demoraba mucho en las anteriores posiciones, entonces mire, mire y mire y me di cuenta que la posición nos servía mucho, mira profe el valor es tener tres veces ese número de la posición pero faltaría restarle uno, y así es mucho más fácil, y nos da el resultado de la posición.

E5: bueno profe a mí me dio 714... (el estudiante explica el proceso realizado¹⁰)

P1: oh les dio la misma respuesta, nos hemos ahorrado mucho tiempo de trabajo con sus procedimientos, qué bien. (En ese instante E7 sonríe)

E7: ... y la posición 500 la hice igual que el 238, 500 por tres me dio 1500

E5: ... la 500 me dio 1.449

E7: ah verdad que le restábamos uno (colocándose su mano izquierda en su boca), es 1449.

(Diálogo entre estudiantes E5, E7 y profesora P1, Bayona 2021a)

Se evidencia que la estudiante E7 transitó de una generalización aritmética sofisticada a una generalización algebraica¹¹, centrando su atención en características presentes entre el término, en este caso la posición y su valor correspondiente, estableciendo un proceso que le permite determinar de manera directa el valor de cualquier posición, sin depender de ningún término conocido. Respecto a los vectores de la ética comunitaria se privilegian los siguientes componentes de los tres vectores (Cuadro 8).

¹⁰ Un proceso que corresponde a una generalización aritmética sofisticada que emplea con dominio y claridad para casos lejanos como cercanos.

¹¹ Para profundizar en la naturaleza de las generalizaciones algebraicas ir a Radford (2010); Vergel (2015); Bayona 1 (2021).

VECTOR	COMPONENTE	INDICADOR
Responsabilidad	*Excedencia -Acogida	*Muestra compromiso con el trabajo *Muestra responsabilidad con el otro, escuchando sus ideas -Valora el esfuerzo de los demás y el propio
Cuidado del otro	*Inmanencia -Encuentro - diálogo	*Reconoce la existencia del otro -Muestra respeto por lo que hacen y dicen los demás
Compromiso con el trabajo conjunto	*Exposición	*Propone abiertamente ideas y las explica <u>evidenciando esfuerzo para poderlas dar a conocer al otro con claridad</u>

Cuadro 8 - Vectores de la ética comunitaria identificados en la actividad matemática de aula, quinto momento
Fuente: datos tomados de Bayona (2021a) y aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b), análisis realizado por Bayona y Vergel (2023)

El vector responsabilidad presente con el componente de excedencia, en el cual los estudiantes muestran compromiso con el trabajo propuesto y se esmeran por resolverlo. El componente acogida presente en el momento de escuchar al otro, intervenir frente a lo que propone y atender las recomendaciones de sus compañeros¹², las cuales permiten reconsiderar las producciones elaboradas en este caso revisar que la respuesta es 1499 y no 1500, más allá del error en el resultado es brindarle al estudiante la posibilidad de revisar el proceso elaborado. Así mismo cuando se valora el esfuerzo de los estudiantes, en el momento que interviene la profesora y destacada el trabajo, la estudiante E7 responde con una sonrisa al reconocimiento realizado.

El cuidado del otro, presente a través de la inmanencia en el cual se reconoce la existencia del otro por lo que dice y como ello incide en las producciones propias, el encuentro y el diálogo a través del respeto por los diversos procesos elaborados, por la singularidad y riqueza de los mismos, tanto el estudiante E5 como la estudiante E7 elaboraron, en este momento, diferentes procesos de generalización, lo cual además de ser aceptado es valorado como una riqueza de la actividad de aula configurada y de manera simultáneamente el componente exposición, del vector compromiso con el trabajo conjunto, cuando el estudiante E7 explica el proceso elaborado de manera detallada y clara, cuando acude tanto a su producción escrita, como a su producción verbal y gestual, de manera tranquila y segura, con la certeza de que su intervención será respetada y valorada tanto por la docente como por sus compañeros, compromiso con el trabajo conjunto.

En la siguiente figura se establece, a manera de síntesis, la presencia de los vectores de la ética comunitaria en la actividad matemática de aula configurada y la incidencia de los mismos en el proceso de generalización realizado por los estudiantes.

¹² Escuchar al compañero y aprender de él; trascender de la idea que la única persona que enseña es el docente es una característica fundamental de la ética comunitaria, es una labor colectiva en la que aprendemos juntos.

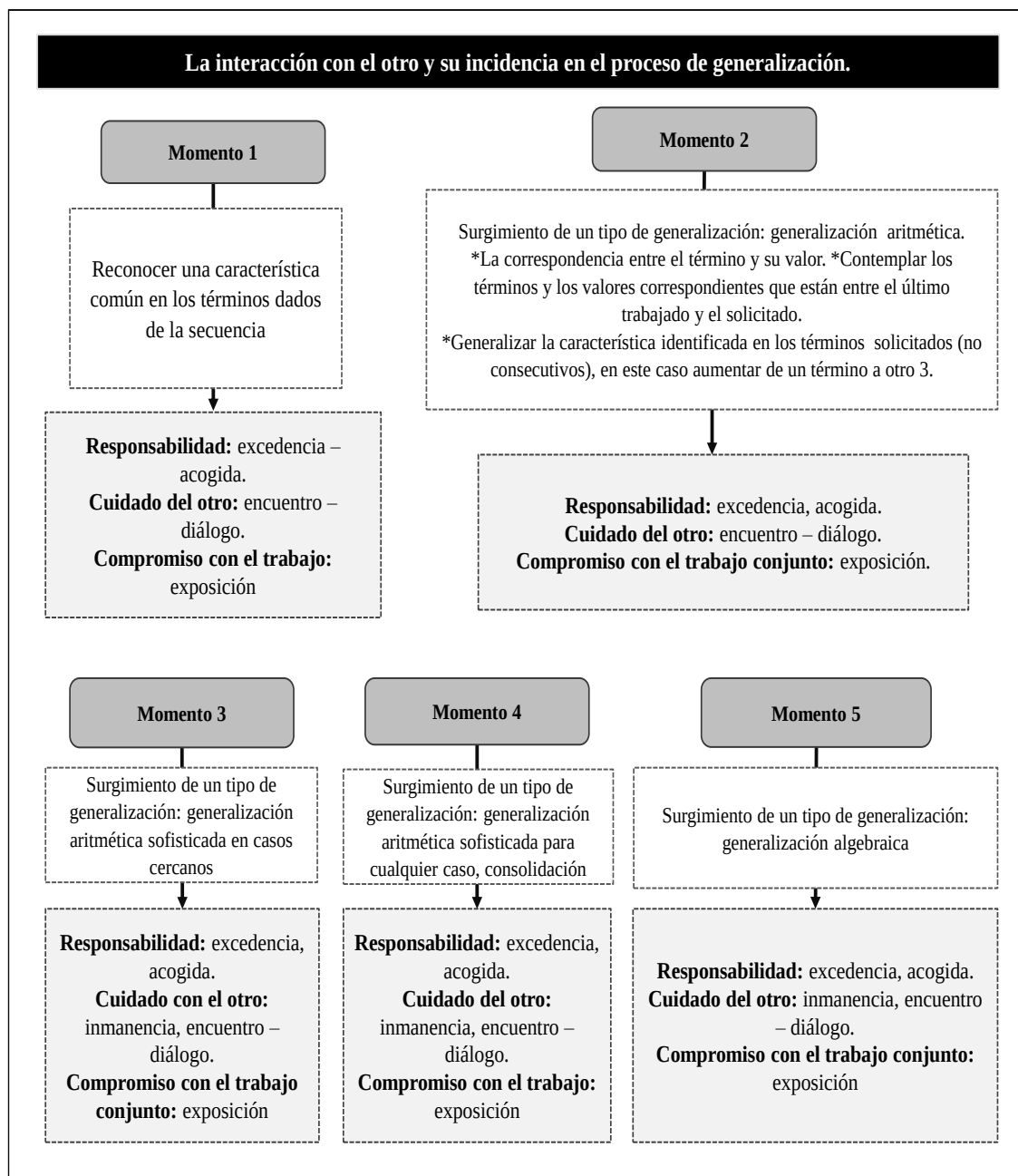


Figura 9 - Presencia de los vectores de la ética comunitaria y su incidencia en el proceso de generalización
Fuente: Elaboración propia (2023), tomando aportes teóricos de Lasprilla (2021) y Radford (2021b)

Respecto al momento 1, se destaca la incidencia de los vectores de la ética comunitaria: responsabilidad, cuidado del otro y compromiso, en la generalización de la característica común en los términos dados de la secuencia y en el término consecutivo solicitado. Si bien es una característica de naturaleza aritmética, identificar que de una posición a otra aumenta tres, es un momento importante en la actividad matemática que se implementó, más aún cuando se ha evidenciado, a través de estudios como Radford (2010), Vergel (2015) y Bayona (2021a) que el trabajo con tareas de secuencias numéricas le implica al estudiante un mayor grado de dificultad frente a su proceso de generalización en relación a las tareas de secuencias figurales.

En el momento dos, se evidencia la incidencia de los vectores de la ética comunitaria en

la generalización de la característica de naturaleza aritmética, sumar tres en este caso, en los términos solicitados no consecutivos, lo cual es un aspecto de gran relevación en el surgimiento del pensamiento algebraico del estudiante. Si bien en el momento tres se está aún en el campo aritmético se evidencia que la presencia de los vectores de la ética comunitaria: responsabilidad, cuidado del otro y compromiso con el trabajo conjunto, posibilitan la consolidación de aspectos que son fundamentales para elaborar posteriormente generalizaciones aritméticas sofisticadas y algebraicas. La correspondencia entre el término y su valor, contemplar los términos y los valores correspondientes que están entre el último término conocido y el solicitado no consecutivo constituyen elementos de gran incidencia en la configuración de generalizaciones de nivel superior.

Para el momento tres y cuatro se evidencia la incidencia de los vectores en la elaboración de generalizaciones aritméticas sofisticadas. En el momento tres son configuradas y empleadas con éxito para casos cercanos por dos estudiantes, mientras que, en el momento cuatro al trabajar con casos lejanos, uno de los estudiantes se apropia de este tipo de generalización empleándola con gran dominio y claridad mientras que para el segundo estudiante los casos lejanos le implicaron dificultad con el proceso de generalización elaborado, lo cual podría concebirse como dificultad pero fue una oportunidad para transitar a un nivel de generalización superior.

En el momento cinco se evidencia la incidencia de los vectores en la elaboración de generalizaciones algebraicas. El trabajo colectivo realizado en los momentos anteriores, la responsabilidad, el cuidado del otro y el compromiso con el trabajo conjunto posibilitaron el tránsito de una generalización aritmética a una aritmética sofisticada y por último a una generalización algebraica, destacando la importancia de cada tipo de generalización en el proceso elaborado por el estudiante y en general, en el desarrollo del pensamiento algebraico.

5 Conclusiones

La ética comunitaria debe ser considerada como un elemento de gran relevancia en la educación matemática, lo anterior sugiere la necesidad de considerar a nivel investigativo la presencia de los vectores que la caracterizan y la incidencia de estos en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

En este sentido y haciendo referencia a la generalización de patrones, el presente artículo aporta evidencias empíricas de cómo inciden los vectores de la ética comunitaria en la evolución de los procesos de generalización que realizan los estudiantes.

En primera instancia identifica la presencia de los vectores de la ética comunitaria en una actividad matemática de aula específica, establece la evolución de los procesos de generalización del estudiante y sugiere una ruta para articular los dos elementos anteriores y poder determinar la incidencia de los vectores en las generalizaciones elaboradas por los estudiantes y por ende en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Para llevar a cabo esta ruta se sugiere configurar una actividad matemática de aula, atendiendo a lo establecido por la teoría de la objetivación, tomar una tarea específica que posibilite el desarrollo del pensamiento algebraico, emplear el análisis multimodal para interpretar y analizar la información proveniente de las sesiones realizadas con los estudiantes y seleccionar diferentes momentos de estas sesiones en las que se identifique la presencia de los vectores.

La selección de estos momentos implica una mirada sensible, detallada e integral del docente investigador de lo ocurrido en la actividad, así como una exigencia en su conocimiento didáctico tanto de la ética comunitaria como del pensamiento algebraico particularmente del proceso de generalización de patrones, teniendo como propósito identificar los vectores de ética comunitaria, la evolución de los procesos de generalización y la incidencia en los procesos elaborados.

Respecto a posibles campos a investigar, un aspecto de gran relevancia es determinar, cuáles vectores hacen mayor presencia en el aula de clase, cuáles son los componentes e indicadores más evidentes o identificables y cómo cada uno de ellos incide con mayor o menor intensidad en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Así mismo poder establecer los indicadores o vectores que son menos evidenciables y definir las formas para poder identificarlos, hacerlos visibles, analizar el grado de incidencia en el pensamiento matemático y establecer orientaciones respecto al estudio de los mimos.

En conclusión, aportar evidencias que atiendan a este propósito se convierte en un aspecto de gran importancia y de interés para el campo de la investigación en educación matemática, es un reto que se debe seguir abordando en el campo investigativo. El presente artículo deja a disposición evidencias, aportes y elementos para avanzar y discutir sobre el tema.

Agradecimientos

Al profesor Luis Radford por la lectura y aportes al artículo.

Referencias

BARBOSA, A.; VALE, I. Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. **Journal of**

the European Teacher Education Network, Viana do Castelo, v. 10, [s.n.], p. 57-70, 2015.

BAYONA, L. **Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria**. 2021. 223h. Tesis (Doctorado en Educación) – Facultad de Educación, Universidad Santo Tomás, Bogotá, 2021a.

BAYONA, L. El pensamiento algebraico en primaria: consideraciones sobre el conocimiento didáctico del docente. **Formación Docente** – Revista Brasileña de Investigación sobre Formación Docente, Belo Horizonte, v. 13, n. 27, p. 133-146, 2021b.

LASPRILLA, A. Analysis of the vectors of community ethics in a mathematics teaching-learning activity. **La matemática e la sua didattica**, Bolonia, Anno 29, v. 29, n. 2, p. 123- 143. 2021.

LÉVINAS, E. De la existencia al existente. Madrid: **Arenas libros**, 2006.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL - MEN. **Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas**. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 2016.

MIRANDA, I., RADFORD, L. y GUZMAN, J. Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 19, n. 3, p. 5-30, 2007.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 5, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA - Pensamiento Numérico Avanzado**, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010.

RADFORD, L. En torno a tres problemas de la generalización. En: L. RICO; M. C. CAÑADAS; J. GUTIÉRREZ; M. MOLINA; I. SEGOVIA (eds.). **Investigación en Didáctica de la Matemática**. Homenaje a Encarnación Castro. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. 18, p. 547-567, 2015.

RADFORD, L. On alienation in the mathematics classroom. **International Journal of Educational Research**, Amsterdam, v. 79, [s.n.], p. 258-266, 2016

RADFORD, L. O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. En: MORETTI, V., RADFORD, L. (eds). **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física. 2021a. p. 171-195.

RADFORD, L. La ética en la teoría de la objetivación. En: RADFORD, L., SILVA, M. (eds). **Ética: entre educación y filosofía**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2021b. p. 107-141.

ROJAS, P.; VERGEL, R. Procesos de generalización y pensamiento algebraico. **Revista Científica**, São Paulo, v. 2, [s.n.], p. 688-694, 2014.

VALENZUELA, G.; GUTIÉRREZ, M. Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. **Educación matemática**, Córdoba, v. 30, n. 2, p. 49-55, 2018.

VERGEL, R. El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. **Folios**, Bogotá, [s.n.], n. 39, p. 65-76, 2014.

VERGEL, R. **Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en educación primaria**. Bogotá: UD editorial, 2015.

VERGEL, R., RADFORD, L., ROJAS, P. Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético sofisticado y proto-formas de pensamiento algebraico. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1174-1192, dic. 2022. Disponible en: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/vj9J4nRpz5tgZ7msqNrS5Ym/?format=pdf&lang=es>. Acceso en: 24 ago. 2024.

VERGEL, R. Reflexões teóricas sobre a atividade semiótica dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em uma tarefa de sequenciamento de padrões. En: MORETTI, V.; RADFORD, L. (eds.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural**. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 79-104.

VERGEL, R.; GODINO, J; FONT, V; PANTANO, O. Comparing the views of the theory of objectification and the onto semiotic approach on the school algebra nature and learning. **Mathematics Education Research Journal**, Sidney, v. 35, n. 69, p. 475-496, nov. 2021. Disponible en: https://link.springer.com/epdf/10.1007/s13394-021-00400-y?sharing_token=nIa5OrbH1Q9AyDNtks5pVPe4RwlQNchNByi7wbcMAY6rNQrQ1nDDELlIcVcgVL3_6wuNQlvbpJXPVfCojcb_0-du2RJp2onK_iXDqfywH2eGej3BlcSMHJ60ftaFwvoA--gVREnp8PKD6Pu7GoUFQi4UUMZAEGEfUv8jSKRHPS0%3D. Acceso en: 24 ago. 2024

VERGEL, R.; ROJAS, P. J. **Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula**. Bogotá: Editorial UD, 2018.

Submetido em 05 de Junho de 2023.
Aprovado em 07 de Julho de 2024.