
ARTÍCULO

Evolución de Sistemas Conceptuales Durante un Programa de Actualización Docente Basado en Modelación Matemática

Conceptual Systems Evolution during a Teacher Professional Development Program based on Mathematical Modeling

Verónica **Vargas-Alejo***

 ORCID iD 0000-0002-7431-0568

Luis **Montero-Moguel****

 ORCID iD 0000-0002-9009-1377

Aarón **Reyes-Rodríguez*****

 ORCID iD 0000-0001-8294-9022

Resumen

Ante la necesidad de desarrollar investigaciones que informen sobre elementos clave para mejorar los programas de actualización en la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación, se llevó a cabo una investigación cualitativa, longitudinal, basada en un estudio de caso. El trabajo se enfoca en el análisis de la evolución del sistema conceptual de un profesor de matemáticas, al estar inmerso en un programa de actualización docente enmarcada en la perspectiva de modelos y modelación. Para este estudio se diseñó un programa de actualización docente multiestratos, el cual involucró interacciones entre estudiantes, profesor e investigadores. El programa se enfocó en promover la evolución del sistema conceptual del profesor al diseñar, implementar y evaluar una secuencia de desarrollo de modelos orientada a apoyar el aprendizaje de la función exponencial en estudiantes universitarios de primer semestre. Los sistemas conceptuales generados por el profesor se caracterizaron con base en tres dimensiones: instruccional, de contenido matemático e histórica. El análisis multidimensional permitió identificar que al participar en el diseño e implementación de una secuencia de desarrollo de modelos el profesor se involucró en procesos de refinamiento iterativo entre el diseño de la secuencia, y las dimensiones de su sistema conceptual. Además, se concluyó que el enfoque multiestratos puede ser un medio para promover la evolución del sistema conceptual de un profesor.

Palabras clave: Sistemas conceptuales. Secuencia de Desarrollo de Modelos. Multiestratos. Modelación. Actualización docente.

* Doctora en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa (CINVESTAV-IPN). Profesora Investigadora, Departamento de Matemáticas, Universidad de Guadalajara (UDG), Guadalajara, Jalisco, México. E-mail: veronica.vargas@academicos.udg.mx.

** Candidato a Doctor en Enseñanza y Aprendizaje Interdisciplinario (UTSA). Estudiante de Doctorado, Departamento de Enseñanza y Aprendizaje Interdisciplinario, The University of Texas at San Antonio (UTSA), San Antonio, Texas, USA. E-mail: luis.monteromoguel@utsa.edu.

*** Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa (CINVESTAV-IPN). Profesor-Investigador, Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. E-mail: aaronr@uah.edu.mx.

Abstract

Given the need to conduct research that informs key elements for enhancing professional development programs in mathematics teaching through modeling, a qualitative and longitudinal investigation was undertaken, grounded in a case study. The study is focused on analyzing the evolution of a mathematics teacher's conceptual system while immersed in a teacher development program within the theoretical reference of the models and modeling perspective. For this study, a multitiered teacher development program was designed, fostering interactions among students, teachers, and researchers. The program was centered on promoting the evolution of the teacher's conceptual system through the design, implementation, and evaluation of a model development sequence aimed at supporting the learning of exponential function among first-semester university students. The teacher's generated conceptual systems were characterized along three dimensions: instructional, mathematical content, and historical. The multidimensional analysis revealed that active involvement in designing and implementing a model development sequence engaged the teacher in iterative refinement processes between sequence design and the dimensions of their conceptual framework. Furthermore, the study concludes that the multitiered approach can serve as a means to promote the evolution of a teacher's conceptual system.

Keywords: Conceptual systems. Model Development Sequence. Multitier. Modeling. Teachers' professional development.

1 Introducción

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación se ha vuelto un tema cada vez más crucial en los distintos niveles educativos. Esto se debe a la creciente relevancia de las matemáticas en la vida cotidiana de las personas y en su desarrollo como ciudadanos informados (Borromeo Ferri, 2021; Garfunkel; Montgomery, 2019). A pesar de esta importancia, llevar la modelación matemática al aula presenta un desafío para los profesores (Corum; Garofalo, 2019; English, 2021).

Entre los diferentes obstáculos o retos para implementar la modelación en el aula, English (2021) destaca la complejidad de significados atribuidos a la modelación matemática. Otro desafío radica en cómo los profesores interpretan y dan sentido a este enfoque en el entorno educativo (Montero-Moguel; Vargas-Alejo, 2022; Vargas-Alejo; Montero-Moguel, 2023). Además, Lewis (2016) señala que a menudo la actualización docente se limita a talleres que dejan al profesor la tarea de profundizar en los conocimientos, y aplicarlos, por sí mismos, en sus prácticas. Aunque este tipo de talleres pueden funcionar para apoyar el aprendizaje de diferentes tipos de conocimientos, pueden ser un desafío para impulsar la enseñanza de matemáticas a través de la modelación, porque esta requiere que los profesores refinan sus ideas a medida que diseñan, implementan y evalúan sus actividades instruccionales (Doerr; Lesh, 2003). Por lo tanto, derivado de estos desafíos y otros adicionales, es necesario generar cambios profundos en los programas de actualización docente, fundamentados en la investigación, que

rompan con los esquemas tradicionales que dejan al profesor la tarea de comprender, diseñar, e implementar la modelación matemática en el aula, sin acompañamiento.

Independientemente del enfoque de modelación que se utilice, promover el aprendizaje de las matemáticas, con base en la modelación, implica prestar atención a diversos elementos clave (Vargas-Alejo; Montero-Moguel, 2023; Doerr; Lesh, 2003; English, 2021; Ledezma; Breda; Font, 2023; Lewis, 2016; Wiegand; Borromeo Ferri, 2023). Al respecto, la Perspectiva de Modelos y Modelación (*MMP*, por sus siglas en inglés) destaca el diseño y desarrollo de actividades para los estudiantes (English, 2021). Asimismo, resalta la necesidad de elaborar programas de actualización docente¹ que acompañen a los profesores en el diseño y la implementación de actividades en su propia práctica (Brady, 2018; Doerr; Lesh, 2003). La actualización docente debe fomentar una enseñanza centrada en el estudiante (Samaras *et al.*, 2019) y contextualizar el aprendizaje en escenarios cercanos a la vida real (NAE; NRC, 2014).

Una de las estrategias de actualización docente para fortalecer la enseñanza de la modelación es el enfoque *multiestratos*, que fomenta las interacciones investigador-profesor-estudiante (Lesh *et al.*, 2000). Koellner-Clark y Lesh (2003) resaltan que, para comprender las formas de pensamiento de los maestros, es necesario identificar y describir diferentes dimensiones; entre ellas, la dimensión de conocimiento matemático, la dimensión instruccional y la dimensión histórica. En este sentido, es fundamental desarrollar investigaciones que aporten en la comprensión de cómo los profesores amplían y refinan sus ideas, a medida que participan en programas de actualización docente, y que informen sobre elementos clave para mejorar la actualización docente en la línea de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de la modelación.

El objetivo de este estudio fue analizar la evolución del *sistema conceptual* de un profesor de matemáticas durante su participación en un programa de actualización docente *ad hoc* con enfoque multiestratos, enmarcado en la MMP. Durante este proceso de actualización docente se diseñó, implementó, evaluó y refinó una secuencia de actividades con estudiantes universitarios de primer semestre. Específicamente, se consideró el análisis de las dimensiones matemática, instruccional e histórica que integran el sistema conceptual del profesor. En este artículo entendemos como sistema conceptual al marco interpretativo y explicativo que está

¹ En este artículo se utiliza el término actualización docente para describir el proceso en el cual el profesor participa para mejorar o perfeccionar su práctica docente en algún tema en específico. En este caso se refiere al perfeccionamiento de la práctica docente en modelación matemática (UDG, 2023). La actualización docente descrita en este artículo tuvo una duración de tres semestres como será descrito con mayor detalle en la sección de metodología.

compuesto por diferentes dimensiones (e.g., histórica, instruccional) que le permite comprender el pensamiento de los estudiantes y generar experiencias para propiciar que los estudiantes desarrollen sus conocimientos y habilidades. La pregunta central que guía esta investigación es la siguiente: ¿Cómo se modifican las diferentes dimensiones del sistema conceptual de un profesor de matemáticas al estar inmerso en un programa de actualización docente multiestratos bajo el enfoque de la MMP?

Para este estudio se diseñó un programa de actualización con enfoque multiestratos que implicó la participación del profesor en el diseño, implementación, evaluación y refinamiento de una *secuencia de desarrollo de modelos* (*model development sequences* o *MDS*, por sus siglas en inglés) (ver sección 3.1) para estudiantes universitarios; resaltando las interacciones estudiantes-estudiantes, profesor-estudiantes y profesor-investigador.

2 Antecedentes

La literatura de investigación en torno a los procesos de formación y actualización docente, desde la perspectiva de la modelación matemática, es extensa (Blum; Borromeo Ferri, 2009; Corum; Garofalo, 2019; English, 2021; Makar; Doerr; Delmas, 2020). Dicha investigación abarca un amplio espectro de aproximaciones teóricas, fundamentalmente en forma de teorías locales (Kaiser; Sriraman, 2006; Stillman, 2019), agrupadas en dos perspectivas principales, aquellas enfocadas en el ciclo de modelación y las centradas en las competencias de modelación (Carreira, 2019; Geiger; Frejd, 2015). Aunque también hay investigaciones basadas en marcos intermedios o generales, como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Barquero; Jessen, 2020; Barquero; Serrano; Serrano, 2013; Fonseca; Gascón; Lucas, 2014), o el Enfoque Ontosemiótico (Ledezma; Breda; Font, 2023).

En esta línea de ideas, se han propuesto otras clasificaciones de los trabajos sobre modelación que incluyen: (a) perspectivas sobre modelos y modelación, (b) aproximaciones curriculares e instruccionales para promover las competencias de modelación o (c) aproximaciones a los modelos y la modelación en la educación de los docentes (English; Ärleback; Mousoulides, 2016). Respecto a las líneas empíricas, se han identificado trabajos enfocados en los estudiantes, en los docentes y en el diseño de tareas de modelación (Stillman, 2019).

Otros investigadores han identificado grandes temas de investigación sobre modelación matemática: análisis de los procesos de modelación, modelación y sus conexiones con otras disciplinas, estrategias para apoyar el diseño e implementación de la modelación, recursos que

apoyan la enseñanza y aprendizaje de la modelación, actualización docente y modelación (Carreira, 2019), modelación realista, modelación educativa, modelación contextual, modelación socio-crítica y modelación epistemológica (Abassian *et al.*, 2019). Algunos de los trabajos más recientes conjugan la modelación con elementos de la perspectiva STEAM (Wiegand; Borrromeo-Ferri, 2023) o emplean problemas de Fermi como actividades apropiadas para favorecer los procesos de modelación (Albarracín *et al.*, 2022).

En cuanto a la modelación y su relación con la actualización de los docentes las investigaciones se han interesado en conocer cómo se está impulsando la inclusión de la modelación en el currículo y en el aula (English, 2021; English; Ärlebäck; Mousoulides, 2016), así como en derivar propuestas para que el profesor pueda diseñar e implementar actividades de modelación en el aula (Makar; Doerr; Delmas, 2020; Corum; Garofalo, 2019) o en la creación de comunidades de aprendizaje enfocadas en la modelación (Fulton *et al.*, 2019).

Entre las actividades de modelación que se proponen en investigaciones de actualización docente se encuentran las MDS, en las cuales los estudiantes tienen la oportunidad de dar sentido a situaciones en contextos de la vida real, mediante herramientas matemáticas (Montero-Moguel; Vargas-Alejo, 2022; Kertil; Erbas; Cetinkaya, 2023; Lesh, 2010; Lesh *et al.*, 2003; Makar; Doerr; Delmas, 2020). Al respecto, se ha evidenciado que las MDS son una herramienta que contribuye al desarrollo de conceptos de diversa naturaleza, entre los que se encuentran tasas de cambio (Kertil; Erbas; Cetinkaya, 2023) o la asociación de estas tasas con fenómenos físicos (Ärlebäck; Doerr, 2018). Los resultados de estas investigaciones reportan dificultades de los docentes para razonar covariacionalmente. También se reporta que al abordar las MDS, donde subyace el concepto de función exponencial, se desarrollan ciclos de modelación que inician con ideas de linealidad y, posteriormente, evolucionan hacia modelos exponenciales (Montero-Moguel; Vargas-Alejo, 2022).

En este contexto, varios investigadores se han interesado en los procesos de formación y actualización docente desde la perspectiva de modelos y modelación matemática, porque una de las principales actividades del profesor consiste en “estructurar cuidadosamente las experiencias en las que los estudiantes confrontan la necesidad de construcciones matemáticamente significativas y en las que repetidamente expresan, prueban y refinan o revisan sus formas actuales de pensar” (Lesh; Doerr, 2003, p. 32).

Algunas investigaciones sugieren que los maestros tienen distintas percepciones e interpretaciones de cómo se aprende, y que estos conocimientos determinan las características de las tareas que proponen a sus estudiantes (Doerr, 2016). Además, no todos los profesores siguen la misma trayectoria de aprendizaje al interpretar y analizar su propia práctica docente

(Doerr; Lesh, 2003). También se ha analizado la naturaleza y desarrollo del conocimiento de los profesores mediante el uso de tres dimensiones: dimensión de conocimiento matemático, dimensión instruccional y dimensión histórica (Koellner-Clark; Lesh, 2003).

3 Referente teórico

Para este estudio se adoptó la Perspectiva de Modelos y Modelación (Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh; Doerr, 2003) como referente teórico. La MMP considera que los individuos crean sistemas conceptuales para interpretar, comprender y explicar sus experiencias diarias, estos sistemas pueden modificarse y/o ampliarse al moldear o dar forma al medio en el que las experiencias ocurren, de tal manera que se construyen nuevos sistemas conceptuales complejos, dinámicos e interactivos (Lesh *et al.*, 2000). Estudiar y describir estos sistemas, que participan en el desarrollo del conocimiento de estudiantes o profesores, implica reconocerlos como “entidades vivientes caracterizadas por ser sistemas complejos, dinámicos, en continua adaptación y auto-regulación” (Kelly; Lesh, 2000, p. 12). Bajo esta perspectiva, el aprendizaje de las matemáticas se conceptualiza como un proceso durante el cual los individuos desarrollan *modelos matemáticos*. Los modelos son:

Sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que se expresan mediante sistemas de notación externa y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas, –quizás de tal manera que el otro sistema pueda ser manipulado o pronosticado de manera inteligente. Un modelo *matemático* se enfoca en las características estructurales (más que, por ejemplo, en las características físicas o musicales) de los sistemas relevantes (Lesh; Doerr, 2003, p. 10)

Los modelos cambian continuamente, se extienden y refinan a partir de las interacciones que sostienen los estudiantes con una situación problemática y con el entorno escolar (Lesh, 2010). En el caso de los profesores, sus modelos son marcos interpretativos y explicativos, para comprender el pensamiento de los estudiantes, para actuar en el aula y propiciar cierto tipo de pensamiento. Estos modelos permiten identificar principios y regularidades en el aprendizaje, con fundamento en la evidencia que aportan las experiencias del aula (Doerr; Lesh, 2003; Lesh; Doerr, 2003). Un modelo tiene componentes internos y externos,

Los componentes internos con frecuencia se refieren a *sistemas conceptuales* o constructos –dependiendo de si la atención se enfoca en el sistema como un todo o los elementos del sistema. Los componentes externos a menudo se denominan artefactos o representaciones –dependiendo si el propósito es producir un sistema que es importante por derecho propio o describir algún otro sistema (Lesh; Carmona, 2003, p. 74).

El propósito de los componentes internos es producir un sistema relevante por sí mismo

y, el de los externos, describir algún otro sistema. Las representaciones son indicadores de cómo los estudiantes (o profesores) interpretan y comprenden una situación problemática (Sevinc; Lesh, 2018). Un modelo permite actuar en el mundo y ver los fenómenos de una manera particular; por ello, al mejorar o refinar un modelo, se dispone de una nueva herramienta para ver el mundo desde otra perspectiva (Lesh; Hamilton; Kaput, 2007).

3.1 Secuencias de desarrollo de modelos

La MMP propone el uso de secuencias de desarrollo de modelos para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. Las MDS son una serie de actividades contextualizadas, en escenarios reales, que se relacionan estructuralmente y tienen como objetivo promover el aprendizaje a través del desarrollo de modelos matemáticos (Ärlebäck; Doerr, 2018; Doerr, 2016; English, 2021; Lesh; Doerr, 2003). Las MDS incluyen tres tipos de actividades: (i) actividad provocadora de modelos (MEA, por sus siglas en inglés: *model eliciting activity*), (ii) actividad de exploración de modelos (MXA, por sus siglas en inglés: *model exploration activity*), y (iii) actividad de adaptación de modelos (MAA, por sus siglas en inglés: *model adaptation activity*).

Generalmente, las MEAs constituyen versiones simplificadas de problemáticas que aparecen en escenarios profesionales tales como determinar dónde ubicar un puente sobre un río urbano o cómo mejorar el tráfico de una localidad (Berry, 2013). Estas tareas tienen la finalidad de alentar a los estudiantes para que expresen, evalúen, refinen o revisen sus propias formas de pensamiento, y lleven a cabo procesos de matematización que incluyen cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, simbolizar y sistematizar (Lesh; Doerr, 2003). Al realizar lo anterior, el pensamiento se expresa mediante representaciones externas, a partir de las cuales es posible identificar fortalezas y debilidades de entendimiento conceptual (Lesh *et al.*, 2003). Desde la perspectiva didáctica de la MMP, el proceso de matematización es más importante incluso que el modelo mismo, pues interesa que los estudiantes desarrollen habilidades y actitudes.

Para diseñar una MEA se han establecido seis principios: (i) significado personal o principio de realidad, (ii) construcción del modelo, (iii) autoevaluación, (iv) externalización del modelo o principio de documentación, (v) prototipo simple y (vi) generalización del modelo (Lesh *et al.*, 2003). La estructura básica de una MEA consiste en una nota periodística, preguntas sobre el contenido de la nota y una situación problema, en la que un cliente demanda un producto, el cual es un modelo generalizable y transferible a situaciones análogas

(Hjalmarson; Diefes-Dux; Moore, 2008; Lesh; Doerr, 2003).

Las MXA tienen como objetivo que los estudiantes generen sistemas robustos de representación al dar sentido a un fenómeno de referencia; por ejemplo, identificando los supuestos subyacentes en el modelo o en cierta representación. Se pretende que mediante las MXA los estudiantes desarrollen un lenguaje y sistemas de representación, no solo para pensar con los conceptos matemáticos, sino también para reflexionar sobre esos conceptos.

Las MAA se enfocan en el uso de las herramientas generadas durante la MEA y refinadas al enfrentar la MXA. En una MAA se proponen problemas difíciles de enfrentar sin las herramientas generadas en las fases previas. Usualmente las MAA se abordan de forma individual, a diferencia de las MEA, que se llevan a cabo trabajando en pequeños grupos (Lesh *et al.*, 2003).

Al diseñar las MDS, quienes construyen la secuencia transitan por diferentes ciclos de diseño que involucran; por ejemplo, (a) la consideración de los contextos reales relevantes para la futura profesión de los estudiantes, (b) la construcción de las actividades basadas en los principios de diseño de las MEAs, (c) la evaluación continua de cada una de las partes de la secuencia, (d) la construcción de borradores de la MDS, pruebas, revisiones y refinamientos (Hjalmarson; Diefes-Dux; Moore, 2008).

3.2 Programas de actualización docente multiestratos

Los programas de actualización docente (o desarrollo profesional) *multiestratos* consideran como premisa básica que el desarrollo cognitivo de un docente es análogo al desarrollo cognitivo de un estudiante. Estos programas promueven la interacción de estudiantes, docentes e investigadores (Koellner-Clark; Lesh, 2003). Dicha interacción se ha identificado como relevante para los programas de actualización docente (Doerr, 2016; Lesh, 2010; Lesh; Doerr, 2003). En un enfoque multiestratos, a medida que los estudiantes se involucran en situaciones de modelación, que los desafían repetidamente a revelar, probar, refinar y revisar sistemas conceptuales (Kelly; Lesh, 2000), el o los docentes enfocan su pensamiento y atención en el comportamiento de los estudiantes al abordar las tareas (Sevinc; Lesh, 2018). Además, conforme los maestros revisan y refinan sus modelos personales, sobre cómo los estudiantes aprenden, con sus acciones impactan los modelos de los estudiantes y viceversa.

En un programa de actualización docente multiestratos las discusiones continuas entre pares son esenciales para fortalecer los conocimientos docentes, ya que los investigadores pueden observar la naturaleza y el desarrollo de conocimientos y habilidades de docentes y

estudiantes, así como la relación dialéctica entre ambos aprendizajes (Figura 1). La MMP sugiere el enfoque multiestratos para comprender la naturaleza de las ideas en desarrollo de los profesores o estudiantes donde se reconoce la influencia de cada uno de los tres niveles: estudiantes, profesores e investigadores (Schorr; Koellner-Clark, 2003). Las bases teóricas del enfoque multiestratos sirvieron como fundamento para el diseño del programa de actualización docente para este estudio.

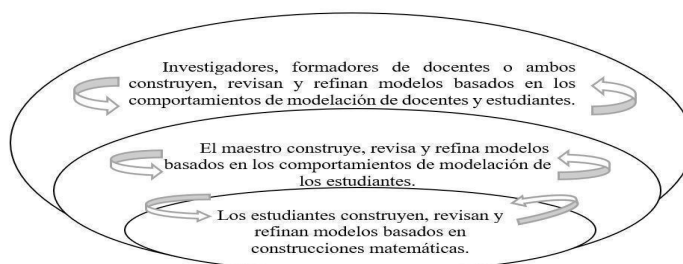


Figura 1 – Estructura de enseñanza o actualización docente multiestratos
Fuente: Koellner-Clark y Lesh (2003, p. 161)

3.3 Sistema conceptual multidimensional

Desde la MMP, comprender la naturaleza y el desarrollo del conocimiento de los maestros durante los procesos de actualización implica ir más allá del estudio de sus creencias, habilidades y actitudes (Lesh, 2010). Implica poner énfasis en los sistemas conceptuales que utilizan para dar significado a situaciones complejas de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con Koellner-Clark y Lesh (2003) es importante observar y apoyar el desarrollo de varias dimensiones, como las de conocimiento matemático, instruccional e histórica. Como se mencionó anteriormente, en este estudio entendemos por sistema conceptual al marco interpretativo y explicativo que está compuesto por diferentes dimensiones (e.g., histórica, instruccional) que le permite comprender el pensamiento de los estudiantes y generar experiencias para propiciar que los estudiantes desarrollen sus conocimientos y habilidades.

La dimensión de contenido matemático se refiere a las ideas matemáticas que desarrollan los profesores, “comenzando con axiomas básicos, definiciones y suposiciones, y derivando otras construcciones o teoremas” (Koellner-Clark; Lesh, 2003, p. 170). La dimensión instruccional se refiere al conocimiento sobre “cómo desarrollar las ideas o conceptos, utilizando los materiales curriculares disponibles, incluidos libros, software, experiencias multimedia, actividades concretas de resolución de problemas y manipulativos” (Koellner-Clark; Lesh, 2003, p. 172). Finalmente, la dimensión histórica se refiere al proceso de desarrollo de sistemas conceptuales de los estudiantes, a través del tiempo, los cuales se amplían,

modifican y extienden con base en las experiencias personales y fomentadas en el aula, de las cuales se derivan significados (Koellner-Clark; Lesh, 2003). El profesor debe reconocer el proceso histórico del desarrollo de conocimiento por sus estudiantes para contribuir al aprendizaje de conceptos matemáticos específicos.

Para apoyar la modificación, extensión y refinamiento del sistema conceptual de los docentes, en las dimensiones mencionadas, la MMP plantea que los profesores deben adquirir experiencia en la modelación de MEAs y ser conscientes de que durante los procesos de matematización pueden emerger múltiples trayectorias de solución. Además, es fundamental que aprendan a tomar decisiones durante los procesos de enseñanza para fomentar la autonomía en sus alumnos y generar sistemas conceptuales cada vez más sofisticados al enfrentar: (a) situaciones que perturben sus modelos actuales, (b) la necesidad de resolver inconsistencias entre predicciones realizadas con modelos existentes y la realidad, (c) la necesidad de compartir experiencias con colegas (Doerr; Lesh, 2003).

4 Metodología

Se condujo un estudio de caso cualitativo, descriptivo y longitudinal. La elección del enfoque de estudio de caso cualitativo y descriptivo se basó en el interés por comprender a profundidad las interpretaciones del profesor seleccionado para el estudio (Yin, 2018). Este enfoque permite considerar múltiples perspectivas del participante, realizar observaciones en entornos naturales y contextualizar las interpretaciones (Simons, 2012).

La elección de un estudio de caso longitudinal se debió a la importancia de identificar cómo evolucionan las interpretaciones del profesor durante el proceso de acompañamiento; con la finalidad de capturar los refinamientos y cambios en las perspectivas del profesor, así como comprender cómo se desarrollan y modifican sus interpretaciones durante la actualización docente (Yin, 2018). Nuestro estudio se justifica como estudio de caso longitudinal porque de acuerdo con Yin (2018, p. 87), un estudio de caso de longitudinal se utiliza para “estudiar el mismo caso único en dos o más momentos distintos”, los intervalos de tiempo son elegidos de acuerdo a las etapas que revelan con más claridad los cambios en los que se tiene interés (Yin, 2018). Por lo tanto, en nuestro estudio se dio seguimiento al profesor a lo largo de la actualización docente en los siguientes intervalos de tiempo que se pueden observar en el cuadro 1.

Actividad	Intervalo 1 (Ago-Dic 2018)	Intervalo 2 (Ene-Jun 2019)	Intervalo 3 (Jul-Dic 2019)	Número de implementaciones
MEA	Diseño- primera implementación y evaluación	Refinamiento del diseño- segunda implementación y evaluación	Tercera implementación y evaluación	3
MXA		Diseño- primer Implementación-Evaluación	Segunda Implementación-Evaluación	2
MAA			Diseño-Primera Implementación-Evaluación	1

Cuadro 1 – Intervalos e implementaciones del estudio
Fuente: elaborado por los autores

Particularmente, se implementó un estudio de caso instrumental (Stake, 2005), cuya finalidad fue comprender con profundidad el fenómeno asociado con el caso, es decir, los sistemas conceptuales generados por el docente al diseñar, implementar y evaluar las MEA-MXA y MAA que conformaron una MDS. Uno de los fundamentos para designar nuestro estudio como un caso instrumental se basa en las investigaciones de Bulloug (2015) y Wasburn (2007). Estos autores, fundamentados en Stake (2005), llevaron a cabo investigaciones con el propósito de explorar un aspecto específico del profesor seleccionado.

4.1 Contexto y participante

El estudio tuvo una duración de 18 meses y el participante fue seleccionado por conveniencia (Otzen; Manterola, 2017). El profesor de matemáticas contaba con cinco años de experiencia docente en licenciatura y nueve años en bachillerato. Durante el desarrollo de la investigación, el profesor cursó una maestría en enseñanza de las matemáticas, en una universidad estatal pública de México. Además, impartió un curso presencial de matemáticas aplicadas a los negocios, en primer semestre de una licenciatura en negocios, en una universidad privada de la zona metropolitana del occidente de México, durante tres semestres. En el programa de la asignatura de matemáticas aplicadas a los negocios, se destaca que los estudiantes deben profundizar en el conocimiento y uso de la función exponencial en contextos reales. El profesor no tenía experiencia previa con la MMP. Todos los estudiantes de sus cursos de licenciatura eran adultos-trabajadores (personas mayores de 23 años que trabajan por las mañanas y estudian por las noches) quienes, en promedio, habían dejado de estudiar 12 años desde la finalización del bachillerato hasta su ingreso a la universidad.

4.2 Instrumentos y procedimientos

Para este estudio se diseñó un programa de actualización docente multiestratos. Es decir, se propició el desarrollo interactivo de investigadores, profesor y estudiantes (Kelly; Lesh, 2000). El investigador observó la naturaleza y el desarrollo de conocimientos y habilidades del docente y estudiantes. Cabe mencionar que este programa de actualización fue diseñado específicamente para este estudio y no formaba parte de la maestría que estaba cursando el profesor.

Durante el programa se llevaron a cabo reuniones semanales entre el profesor y un investigador. El proceso de acompañamiento investigador-profesor se dividió en tres etapas. El contenido de la primera etapa fue previamente establecido; mientras que los contenidos de la segunda y tercera etapa fueron contruidos y modificados a partir de los sistemas conceptuales exhibidos por el profesor, por lo tanto, los contenidos se consideran emergentes.

Primera etapa: selección y asignación de lecturas fundamentales de la MMP (e.g., Lesh; Doerr, 2003), discusión de las lecturas entre el profesor y el investigador, diseño e implementación de la MEA con estudiantes. Segunda etapa: análisis de la primera implementación de la MEA, selección y discusión de lecturas sobre la MMP y sobre la función exponencial; diseño e implementación de la MEA y la MXA con estudiantes. Tercera etapa: análisis de la implementación de la MEA y la MXA, selección y discusión de lecturas acerca de la MMP, diseño de la MAA, y por lo tanto, diseño, implementación con estudiantes y evaluación de la MDS.

La MEA se diseñó con base en los seis principios propuestos por Lesh *et al.* (2003). Se compone de tres partes: a) Actividad de calentamiento o nota periodística en el contexto de la población de una ciudad y los efectos en la vialidad, b) Preguntas de calentamiento sobre el contexto contenido en la nota, c) Situación problema orientada para que los alumnos redactaran una carta dirigida a las autoridades del municipio para explicar el crecimiento poblacional con el fin de tomarse en cuenta en los proyectos de infraestructura vial.

La MXA se compone de tres actividades: a) Actividad con *PowerPoint*, b) Actividad *diseminación de enfermedades* de la biblioteca de NetLogo HubNet c) Actividad dinámica con

GeoGebra. La MAA se compone de tres partes: A) Actividad de Calentamiento o nota periodística diseñada mediante un artículo y un video. Ambos con información sobre el efecto que ocasiona el consumo de energía eléctrica sobre el medio ambiente y el ahorro de energía al invertir en ciertos productos, b) Preguntas de calentamiento relacionadas con el contexto contenido en la nota, c) Situación problema diseñada para que los alumnos construyeran un modelo que permitiera a una empresa invertir en un producto de inversión a partir del ahorro generado por el cambio de luminarias.

4.3 Procesamiento y análisis de la información

Los datos para el análisis provinieron de las implementaciones de la MDS y de las reuniones semanales entre el profesor y el investigador. Los instrumentos de recolección de la información fueron: (a) grabaciones de audio de las entrevistas con el profesor; (b) producciones escritas de los estudiantes (en papel y digitales), (c) notas de campo y reflexiones del profesor, capturados en una bitácora. Los datos se organizaron con base en el tipo de interacción desarrollada: (a) estudiantes-estudiantes, (b) profesor-estudiantes y (c) profesor-investigador.

En primer lugar, se transcribieron las grabaciones de audio y se organizaron las producciones escritas, con base en los mismos tipos de interacción que las grabaciones de audio. A continuación, se llevó a cabo una codificación abierta según el enfoque propuesto por Corbin y Strauss (2014), quienes establecen que la codificación abierta es un proceso exploratorio que implica separar los datos, reflexionar sobre esos datos bajo la creación de memorandos y asignar a cada memorándum un concepto que puede ser una palabra o frase que represente las interpretaciones del investigador del extracto señalado. La separación de datos se desarrolló de la siguiente manera: Sección 1: Datos provenientes de la MEA, Sección 2: Datos provenientes de la MXA. Sección 3: Datos provenientes de la MAA. En cada apartado se generaron las subsecciones de diseño, implementación y evaluación. Posteriormente, se integraron al sistema NVIVO 12 para el proceso de creación de memorandos incluyendo sus conceptos asociados. Como ejemplo se incluye en la Figura 2 el memorándum creado de un extracto de la entrevista del profesor de la subsección de evaluación proveniente de la sección 1. Estos conceptos sirvieron para contextualizar la descripción de las categorías de análisis como se describe en la siguiente sección.

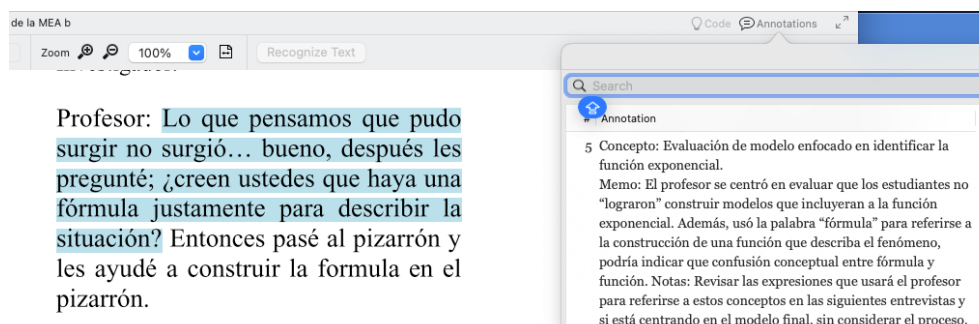


Figura 2 – Ejemplo de creación de memorándum y concepto asociado
Fuente: archivos digitales extraído de NVIVO12

Con el objetivo de responder la pregunta de investigación, lo cual implica comprender las dimensiones inmersas en el sistema conceptual del profesor -Entendiendo por sistema conceptual al marco interpretativo y explicativo que está compuesto por diferentes dimensiones (e.g., histórica, instruccional) que le permite comprender el pensamiento de los estudiantes y generar experiencias para propiciar que los estudiantes desarrollen sus conocimientos y habilidades- se condujo la estrategia de proposiciones teóricas (Yin, 2018). En este artículo nos centramos en analizar las dimensiones de conocimiento matemático, instruccional e histórica. Yin (2018) sostiene que en esta estrategia, las proposiciones teóricas, que sirven como fundamento del estudio, guían el análisis al señalar las condiciones contextuales relevantes que deben describirse, así como las interpretaciones que deben examinarse. Esta estrategia fue fundamental para la construcción de las categorías de análisis (Cuadro 2) las cuales se originaron a partir de las condiciones contextuales asociadas a la descripción del sistema conceptual del profesor desde el enfoque de análisis multidimensional propuesto por la MMP. Las condiciones contextuales asociadas se refieren a las características propias de este estudio, para lo cual fueron fundamentales los conceptos que emergieron de la codificación abierta para contextualizar nuestro estudio en las definiciones provenientes de los referentes teóricos. Por ejemplo, el concepto de la “evaluación de modelo enfocado en identificar la función exponencial” (NVIVO12, Figura 2) contribuyó a contextualizar la descripción del código de análisis de contenido matemático (Cuadro 2) porque para nuestro estudio era relevante que el profesor estaba interesado en la función exponencial y sus conceptos asociados. Además, este concepto contribuyó a incluir en la dimensión histórica el análisis de la evaluación del proceso de construcción de los modelos más que como un producto final.

Código	Descripción	Indicadores
Contenido matemático (CM)	Se asocia con las ideas matemáticas desarrolladas por el profesor.	Descripciones o expresiones del profesor que exhiben su conocimientos y evolución de sus conocimientos sobre conceptos matemáticos (e.g., función, función exponencial).

Instruccional (I)	Incluye las ideas y conocimientos del profesor que propician que modifique y refine las actividades e instrucciones.	El profesor considera relevante incorporar variedad de recursos y materiales (como software y actividades de modelación adicionales) con el propósito de ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes.
Histórica (H)	Abarca las ideas y percepciones del profesor que le permiten identificar el proceso histórico de desarrollo de sistemas conceptuales de los estudiantes al abordar actividades de modelación.	El profesor evalúa los modelos de sus estudiantes con base al modelo final o al proceso de construcción de los modelos.

Cuadro 2 – Categorías de análisis
Fuente: elaborado por los autores

El segundo ciclo de codificación incluyó el análisis de las tres dimensiones del sistema conceptual del profesor con base en las categorías de análisis (Cuadro 2) en cada etapa de la implementación.

4.4 Criterios de validez

Se implementaron tres tácticas para asegurar la validez de constructo de los estudios de casos descriptivos propuestas por Yin (2018). La primera táctica consiste en utilizar múltiples fuentes de evidencia, o triangulación, con el fin de fomentar líneas convergentes de resultados. En este estudio se triangularon las fuentes de evidencia, incluyendo audios, producciones escritas de los estudiantes, además de notas de campo del profesor y el investigador. La segunda táctica es establecer una cadena de evidencia; la cual, en este caso, se aseguró al establecer hallazgos hipotéticos basados en las interpretaciones del investigador principal sobre el sistema conceptual del profesor. Posteriormente, estos hallazgos fueron revisados por el segundo investigador que se basó en datos específicos para corroborar dichos hallazgos. La tercera táctica consiste en solicitar a informantes clave que revisen el borrador del informe del estudio de caso. En este caso, los borradores preliminares del informe fueron revisados por el segundo y tercer autor del artículo.

5 Resultados y discusión

En esta sección se describen los sistemas conceptuales generados por el docente al diseñar, implementar y evaluar las actividades de la MDS (MEA, MXA y MAA) y se muestra su evolución; es decir, los procesos de extensión, modificación y refinamiento de estos sistemas, los cuales se describen mediante las dimensiones de conocimiento matemático, instruccional e

histórica. Aunque las dimensiones están interrelacionadas, se describe la evolución del sistema conceptual del docente a través de cada dimensión en forma separada. Las diferentes interacciones entre investigador, profesor y estudiantes, a lo largo de todo el proceso, fueron fundamentales en la evolución del sistema conceptual del docente.

Esta evolución se describe durante las tres etapas siguientes. Etapa 1 - Diseño, Implementación y Evaluación de la MEA. En esta primera etapa el docente a partir de su experiencia, conocimiento matemático, revisión de literatura de la MMP y análisis curricular construyó una MEA y la discutió con el investigador. Enseguida la implementó con sus estudiantes tomando en cuenta elementos recomendados por la MMP como el trabajo colaborativo, en equipo y grupal, y el uso de tecnología. Finalmente, en interacción con el investigador evaluó los resultados de la implementación. Etapa 2 - Diseño, Implementación y Evaluación de la MEA-MXA. En esta segunda etapa el docente construyó una MXA, tomando en cuenta los resultados del diseño-implementación-evaluación de la MEA, su conocimiento matemático y la revisión de literatura de la MMP. Implementó la MEA-MXA con sus estudiantes en un ambiente colaborativo en equipo y grupal mediante el uso de tecnología. Finalmente, en interacción con el investigador evaluó los resultados. Etapa 3 - Diseño, Implementación y Evaluación de la MEA-MXA-MAA. En esta tercera etapa el docente tomando en cuenta los resultados obtenidos en el diseño-implementación-evaluación de la MEA-MXA, su conocimiento matemático y la revisión de literatura de la MMP construyó una MAA. Implementó la MEA-MXA-MAA en un ambiente individual y grupal mediante el uso de tecnología. Finalmente, en interacción con el investigador evaluó los resultados.

5.1 Etapa 1 - Diseño, implementación y evaluación de la MEA

5.1.1 Diseño de la MEA

Interacción investigador-profesor. El investigador propició la reflexión del docente durante el diseño de la MEA con relación a las dimensiones de la siguiente manera. En cuanto a la dimensión de conocimiento matemático y dimensión histórica, solicitó al profesor la lectura de diversos documentos académicos con el objetivo de proporcionar respuestas a las siguientes preguntas: ¿cómo se define una función? ¿Cómo se define una función exponencial? ¿Con qué conceptos se relaciona? ¿Qué propiedades tiene? ¿Cuáles son sus representaciones? Las preguntas planteadas generaron una reflexión en torno a los procesos recursivos al construir representaciones tabulares y las posibles dificultades de los estudiantes para generar una

representación algebraica de la función exponencial.

La dimensión instruccional se observó cuando el docente revisó libros de texto, a sugerencia del investigador, para examinar cómo se aborda el tema de la función exponencial y determinar si se fomenta, o no, el uso de tecnologías digitales. Se proporcionó al docente bibliografía sobre la MMP, especialmente en relación con los principios de diseño de las MEAs (Lesh, 2010; Lesh; Doerr, 2003). Con el apoyo del investigador, el profesor diseñó una MEA basada en el contexto de crecimiento poblacional. Durante el proceso de diseño el docente reconoció la importancia de fomentar el uso de un entorno de lápiz y papel, pero destacó la relevancia de utilizar la tecnología debido a su dinamismo y capacidad para construir múltiples representaciones que permiten identificar y dar significado a las variables, así como comprender el tipo de variación.

5.1.2 Implementación de la MEA

Interacción profesor-estudiantes. Durante la implementación de la MEA, el profesor dividió en dos equipos al grupo conformado por cinco estudiantes. La siguiente descripción se basa en las transcripciones de los audios, la bitácora del docente, las producciones escritas y digitales de los estudiantes, y los comentarios proporcionados al investigador en relación a aspectos específicos de la implementación.

En cuanto a la dimensión instruccional, el profesor permitió que los estudiantes utilizaran calculadoras y hojas de cálculo para abordar la situación problemática relacionada con el crecimiento poblacional. Durante la exposición grupal, los estudiantes presentaron y discutieron sus modelos, generando una reflexión en torno a las representaciones utilizadas.

En relación con la dimensión de conocimiento matemático, el profesor destacó que el equipo 2 empleó representaciones tabulares, gráficas y verbales (Figura 3), mientras que el equipo 1 se limitó a utilizar representaciones tabulares y verbales. También resaltó que los equipos no describieron cómo identificaron las variables y el tipo de variación. El profesor esperaba que los estudiantes utilizaran una representación algebraica (fórmula) de la función exponencial, por lo que brindó apoyo a los estudiantes para obtener la expresión: $P(t) = P_i(1 + r)^t$. Además, enfatizó en los conceptos matemáticos clave, como base, tasa de crecimiento y exponente. Por último, señaló que gracias a la generalización algebraica, los estudiantes lograron resolver, por sí solos, un problema del libro de texto.

Profesor: Lo que pensamos que pudo surgir no surgió... bueno, después les pregunté; ¿creen ustedes que haya una fórmula justamente para describir la situación? [el docente señaló que

fue necesario ayudar a los estudiantes para que construyeran la expresión algebraica de la función].
(Diálogo entre investigador y profesor, 2018).

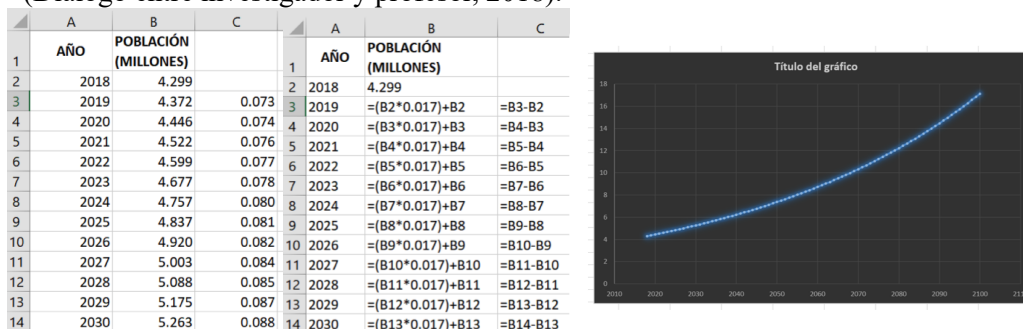


Figura 3 – Representaciones tabulares y gráficas
Fuente: archivos digitales de estudiantes (equipo 2)

5.1.3 Evaluación de la MEA

Interacción investigador-profesor. En cuanto a la dimensión histórica, inicialmente el profesor se centró en describir el interés de los estudiantes en la MEA y los modelos finales, sin valorar el proceso de construcción; a pesar de las lecturas realizadas sobre la MMP donde se resalta que el proceso de construcción del modelo es el producto (Lesh; Doerr, 2003). Además, el profesor no identificó que los estudiantes habían propuesto modelos lineales antes de considerar los modelos exponenciales.

Investigador: ¿de inmediato trabajaron con la función exponencial los dos equipos? ¿Identificaron el 1.7 de crecimiento e hicieron algo exponencial? ¿No hicieron algo lineal?

Profesor: Ah... no surgió un modelo lineal.

(Diálogo entre profesor e investigador, 2018)

La interacción investigador-profesor llevó a una reorientación del análisis del profesor hacia el proceso de construcción de modelos por parte de los estudiantes (dimensión de contenido matemático) y cómo los modelos fueron construidos, modificados, ampliados y refinados a lo largo del tiempo (dimensión histórica). Con el apoyo del investigador, el docente elaboró una descripción más detallada de lo ocurrido durante el proceso de implementación de la MEA; logrando explicar las concepciones y estrategias utilizadas por los estudiantes, y relacionarlas con los principios de diseño de la MEA.

En esta nueva descripción, el profesor identificó dos tipos de modelos: lineales (iniciales) y exponenciales (finales). Observó cómo los estudiantes identificaron variables y tasas de cambio, y cómo las relacionaron mediante representaciones tabulares y gráficas. El profesor examinó el potencial de la actividad en términos del conocimiento que los estudiantes exhibieron sobre la función exponencial, las representaciones utilizadas, las conjeturas, los argumentos y las creencias que emergieron durante el proceso de solución del problema. Las

observaciones relacionadas con el interés mostrado por los estudiantes ante la actividad se enmarcaron en el principio de significado personal. Específicamente, el interés exhibido por los estudiantes al dar sentido a la problemática y expresar su preocupación al relacionar el crecimiento poblacional con la vialidad.

5.1.4 Discusión

La experiencia al implementar la MEA en el aula fue significativa para el docente, porque le permitió darse cuenta cómo estas actividades resultaban atractivas para los estudiantes y ampliar su perspectiva respecto a otro tipo de problemas para proponer en clase. Esto coincide con investigaciones realizadas por Martínez, Araya y Berger (2017), quienes han encontrado que los profesores experimentan cambios en sus actitudes y creencias al incorporar problemas abiertos en su práctica docente, especialmente en la forma en que trabajan en el aula, en ellos mismos y en sus estudiantes. Sin embargo, en este estudio, el enfoque multiestratos resultó ser un elemento esencial que posibilitó al docente revisar, reflexionar, modificar y refinar su sistema conceptual inicial, de manera análoga a lo reportado en el estudio de Koellner-Clark y Lesh (2003).

Inicialmente, el profesor se centró en los modelos finales de los estudiantes, resaltando la falta de una representación algebraica y restringiendo la observación al concepto de función exponencial (dimensión de conocimiento matemático). Posteriormente, a partir de la interacción con el investigador, el foco del análisis se cambió al proceso de construcción de los modelos y, por ello, ahora el docente analizó cómo el pensamiento de los estudiantes evolucionó del modelo lineal al modelo exponencial (dimensiones de conocimiento matemático y dimensión histórica).

Durante esta primera etapa, el docente incorporó a su sistema conceptual elementos acerca de cómo aprovechar el dinamismo de la tecnología (dimensión instruccional), para que los estudiantes den significado a los conceptos matemáticos. Además, el docente pudo explicar teóricamente la motivación de los estudiantes por la actividad, con base en los principios de la MMP. También pasó de centrar la atención en el proceso de matematización, a considerar las estrategias y las concepciones de los estudiantes. Al final de la sección 5 (Cuadro 3) se sintetiza la evolución del sistema conceptual del docente.

5.2 Etapa 2 - Diseño, implementación y evaluación de la MEA-MXA

5.2.1 Diseño la MEA-MXA

Interacción investigador-profesor. El profesor propuso algunos cambios al diseño de la MEA (dimensión instruccional) y sugirió que, posterior a su implementación, los estudiantes participaran en otra actividad, con un contexto diferente (MXA). El objetivo de esta nueva actividad fue profundizar en los conceptos matemáticos integrados en los modelos para abordar la MEA, tales como variables, variación, covariación, relaciones lineales y exponenciales, fórmulas recursivas, base, exponente, ordenada al origen, tasa de crecimiento, traslación de gráficas, función creciente y decreciente (dimensión de conocimiento matemático).

En relación con la dimensión instruccional, el investigador propuso incluir en la MXA el entorno de modelación programable multi-agente NetLogo². Con el apoyo de un experto en cómputo, el docente analizó y modificó la actividad “diseminación de enfermedades”, disponible en la biblioteca del software (Figura 4a) para utilizarla en la MDS. Además, construyó e incorporó en la MXA un applet con GeoGebra (Figura 4b).

En lo que corresponde a la dimensión histórica, el diseño de la MXA se basó en el análisis de cómo los estudiantes construyen, modifican y amplían su sistema conceptual, así como las estrategias utilizadas durante la primera implementación. Se tomaron en cuenta los tipos de razonamiento covariacional (Thompson; Carlson, 2017) de los estudiantes al diseñar las hojas de trabajo. Esto evidencia cómo el docente comprendió el principio de la MMP el cual establece que *el proceso es el producto*.

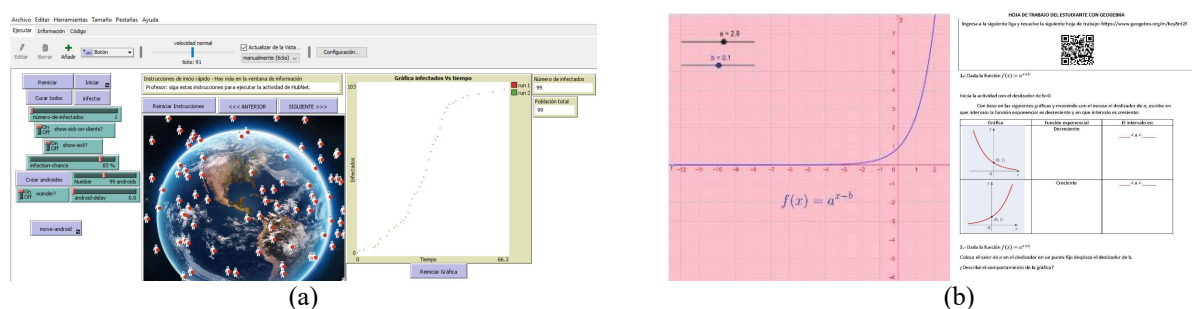


Figura 4 – MXA: Simulador de diseminación de enfermedades y applet con GeoGebra
Fuente: archivos digitales de los investigadores

5.2.2 Implementación de la MEA-MXA

Interacción profesor-estudiantes. En esta segunda implementación participaron diez

² <https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>

estudiantes, organizados en cuatro equipos. Los estudiantes emplearon diferentes representaciones en sus modelos: tabulares, gráficas, algebraicas y verbales (Figura 5). El docente describió detalladamente cómo los estudiantes construyeron y refinaron sus sistemas conceptuales, validando todas las representaciones utilizadas (dimensión histórica). Durante este proceso, el docente identificó cómo algunos equipos no diferenciaron un crecimiento constante de un crecimiento exponencial. Para abordar esta situación, planteó preguntas que incentivaran a los estudiantes a establecer diferencias y expresar sus opiniones durante la discusión grupal, y se logró que un equipo reconociera que su modelo estaba asociado a un crecimiento constante y que otro equipo identificará la consideración de un crecimiento exponencial.

Equipo D: Es que mira, yo creo que el 1.7 es un crecimiento promedio, promedio, pero que ya el número de personas, que es lo que se está buscando, sí variaría, ¿no?

Equipo B: Tienes razón porque cambian los números.

(Diálogo entre equipos de estudiantes, 2019).

A quien corresponda

El motivo de esta carta es presentar los resultados de la investigación acerca del crecimiento poblacional a lo largo de los próximos años, en el cual nos dimos cuenta que el tuvimos un incremento del 1.7% anual.

El procedimiento con el cual se realizó la investigación fue el siguiente: en base a los datos del año 2018 y al 1.7% de la población dio el resultado 4.299 el cual se tomó como base para lo siguiente

2020	4.522
2022	4.677
2024	4.838
2030	5.353
2040	6.336
2041	6.444
2100	17.422

Llegamos a la conclusión de que la variación es constante así como también encontramos que en el año 2051 se aproxima a los 7.56 millones, en el año 2056 se aproxima a los 8.323 millones y en el año 2059 se duplicó la población del 2018, al final llegamos a un total en el año 2100 de 17.422 millones de personas.

A quien corresponda

Secretaría de Infraestructura

Buenas tardes nos dimos la tarea de investigar el crecimiento poblacional para ver el comportamiento y proyectar el crecimiento en años.

Encontramos una fórmula para calcular la población en cierto número de años que es

$$\text{Población en } n \text{ años} = \text{Población base} (1 + 0.017)^n$$

con esta fórmula nos dimos cuenta que en el 2038 habrá 6 millones de personas también en el año 2052 habrá una población mayor a 7.560 millones y además en el año 2057 llegamos a 8.323 millones de personas y para el año 2060 se duplicará la población del 2018 y nos dimos cuenta que la variación no es constante que la población aumenta que la tasa cambia cada año.

Figura 5 – Cartas de los equipos B (izquierda) y D (derecha)

Fuente: archivos digitales de estudiantes

La intervención del docente fue fundamental para que el grupo pudiera establecer la diferencia entre un crecimiento constante y uno exponencial, permitiendo que los estudiantes discriminaran las características de la función exponencial y la función lineal. En cuanto a la dimensión instruccional, la inclusión de NetLogo y GeoGebra posibilitó a los estudiantes profundizar en los conceptos asociados a la función exponencial inmersos en la MXA. En el caso de NetLogo, se revisaron conceptos como función, variación, dominio, rango, función creciente, función decreciente, representación gráfica. Por otro lado, GeoGebra permitió explorar conceptos como función, variación, dominio, rango, función creciente, función decreciente, traslación, representación gráfica y algebraica.

En relación con la dimensión histórica, el profesor amplió su descripción al narrar lo

ocurrido en el aula. Además de destacar el interés mostrado por los estudiantes en abordar la MEA como la MXA, el docente explicó con detalle el proceso de construcción de modelos por parte de los estudiantes. El profesor observó una transición de los modelos, pasando de un patrón de crecimiento constante a uno con características de crecimiento exponencial. Resaltó la inclusión de diferentes representaciones en los modelos como tablas, gráficas, descripciones verbales y expresiones algebraicas; previo a la discusión grupal. La evolución del sistema conceptual del docente influyó en los modelos que construyeron los estudiantes tal como es mencionado por Kelly y Lesh (2000).

5.2.3 Evaluación de la MEA-MXA

Interacción investigador-profesor. El docente describió cómo los estudiantes transitaban por diferentes ciclos de modelación al abordar la MEA (dimensión histórica). Cada ciclo implicó una ampliación y refinamiento del conocimiento matemático de los estudiantes. Específicamente, la MXA les permitió profundizar en los conceptos involucrados en la MEA, y reconocer la importancia de *institucionalizar* dichos conceptos. Utilizando la revisión de literatura y la guía de evaluación de calidad de MEA (Lesh, 2010), el docente analizó los audios y las producciones escritas de los estudiantes para describir las características y distinguir entre modelos que requerían dirección, modelos que necesitaban mayor extensión o refinamiento, modelos situados, así como modelos que podían compartirse y reutilizarse (dimensión instruccional).

5.2.4 Discusión

El profesor mostró un creciente interés en la *evolución* de los modelos construidos (dimensión histórica e instruccional). La descripción del comportamiento de los estudiantes y los modelos construidos, apoyó la modificación y ampliación del sistema conceptual del profesor (Koellner-Clark; Lesh, 2003), afirmación que se sustenta en el uso de la guía de evaluación de calidad de una MEA (Lesh, 2010) para describir y evaluar los modelos construidos por los estudiantes.

Coincidimos con Kelly y Lesh (2000) en que el refinamiento del sistema conceptual del docente impacta en el aprendizaje de los estudiantes. En esta etapa, se incorporaron múltiples herramientas tecnológicas durante el proceso instruccional (dimensión instruccional) a través

del uso de GeoGebra y NetLogo con el objetivo de que los estudiantes distinguieran entre un crecimiento constante y uno exponencial. En términos de Lesh *et al.* (2007), cuando el profesor refinó su sistema conceptual, dispuso de una nueva herramienta para ver el aprendizaje de la función exponencial desde otra perspectiva, y así comprender la relevancia de diferenciar entre lo lineal y lo exponencial. Otras modificaciones, ampliaciones y refinamiento del sistema conceptual del docente se muestran al final de la sección 4 (Cuadro 3).

5.3 Etapa 3 - Diseño, implementación y evaluación de la MEA-MXA-MAA

5.3.1 Diseño de la MAA

Interacción investigador-profesor. La reflexión realizada durante las etapas anteriores, las lecturas sobre la MMP, el razonamiento covariacional, y la interacción con el investigador, permitieron al docente comprender la importancia de diseñar e incluir la MAA en la MDS. Lo hizo con el objetivo de brindar a los estudiantes la oportunidad de utilizar y adaptar los conceptos matemáticos relacionados con la función exponencial que emergieron en la MEA y que se retomaron en la MXA (dimensión instruccional). Además, al abordar la MAA, los estudiantes propusieron modelos factibles de compartirse y reutilizarse, en lugar de respuestas cortas.

En lo referente a la dimensión de conocimiento matemático, el docente diseñó la MAA en el contexto de ahorro de energía e inversiones, donde subyacen los conceptos de función lineal y función exponencial. El profesor construyó una actividad abierta para que los estudiantes pudieran utilizar las estrategias y los conceptos matemáticos desarrollados en el ciclo de modelación previo.

En relación a la dimensión instruccional, el docente y el investigador dieron forma a la MDS utilizando GeoGebra y NetLogo para profundizar en los conceptos matemáticos. También se utilizó Excel como herramienta auxiliar en la construcción de los modelos.

En lo relativo a la dimensión histórica, el análisis de la evolución de los modelos contruidos por los estudiantes en la segunda fase de implementación permitió al docente enfatizar el tránsito por diferentes ciclos de modelación (lineal y cuadrático) para probar, revisar profundizar y ampliar, estrategias y conceptos relacionados con la función exponencial inmersos en la MDS, entre los cuales destacan las ideas de variación, dominio, rango, función creciente, función decreciente, y las representaciones tabulares, gráficas y algebraicas.

5.3.2 Implementación de la MEA-MXA-MAA

Interacción profesor-estudiantes. En lo que se refiere a la dimensión conocimiento matemático, el profesor observó cómo los diez estudiantes transitaban por diferentes ciclos de modelación al abordar la MAA, y construyeron modelos que incluían una función lineal para el caso del ahorro, una función exponencial para las inversiones, y una diversidad de representaciones, como la verbal, gráfica, algebraica y tabular (Figura 6).

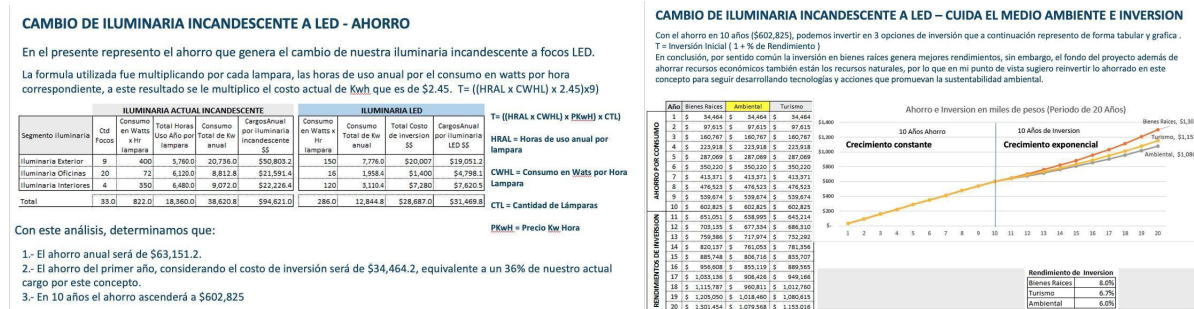


Figura 6 – Modelos tabulares y gráficos
 Fuente: archivos digitales de estudiantes (Etapa 2)

En cuanto a la dimensión instruccional, los modelos construidos por los estudiantes al abordar la MAA se basaron en el conocimiento que desarrollaron y profundizaron al utilizar NetLogo y GeoGebra durante la MXA.

En relación a la dimensión histórica, el profesor describió el proceso de desarrollo de conocimiento por parte de los estudiantes. Observó que el conocimiento construido al abordar la MEA y la MXA se utilizó para abordar la MAA, lo que evidencia un proceso de transferencia de conocimientos (Kaminski; Sloutsky; Heckler, 2009). Los modelos construidos por los estudiantes fueron factibles de compartirse y reutilizarse, lo cual evidencia un progreso en su comprensión.

5.3.3 Evaluación de la MEA-MXA-MAA

Interacción investigador-profesor. El profesor describió los diferentes ciclos de modelación al abordar la MDS (MEA-MXA-MAA) y discutió cómo y bajo qué circunstancias el sistema conceptual de los estudiantes se adaptó para dar sentido a la MAA (dimensión histórica). Caracterizó los modelos en términos de niveles de covariación, uso de relaciones lineales y exponenciales, y su factibilidad para compartir y reutilizar esos modelos. Además, pudo determinar cómo y por qué se comprendió de mejor manera a la función exponencial, y cómo los estudiantes la diferenciaron de la función lineal. Esto resultó útil para interpretar y

realizar predicciones asociadas con el fenómeno de referencia.

Profesor: Los estudiantes construyen un sistema conceptual con base en sus creencias y modelos previos, pero de una forma intuitiva [...] Entonces, se observa qué es lo que creó, se observa lo que hace falta. Se puede profundizar, extraer los conceptos matemáticos que están ahí [inmersos en los modelos]. La labor del docente es diseñar y estructurar actividades que le permitan al estudiante construir y utilizar su sistema conceptual.
 (Respuesta del profesor al investigador, 2019).

5.3.4 Discusión

Una vez más, el enfoque multiestratos fue esencial para la ampliación, modificación y refinamiento del sistema conceptual del profesor. Se identificó una evolución del conocimiento y habilidades docentes, especialmente para apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de la función exponencial (Dimensión de conocimiento matemático e instruccional). Los marcos interpretativos y explicativos utilizados por el docente para comprender el pensamiento de los estudiantes (Dimensión histórica) evolucionaron a lo largo del proceso (Cuadro 3).

	Etapas 1	Etapas 2	Etapas 3
C	-Cuántas y cuáles representaciones se utilizaron. - Atención en los modelos finales. -Se enfatizan las representaciones algebraicas. -Asociación de conceptos: base, tasa de crecimiento y exponente de la función exponencial.	-Descripción de representaciones por su importancia en conceptos de variación y covariación. -Se amplía y profundiza el concepto de función exponencial: variables, covariación, relaciones lineales y exponenciales, recursividad, base, exponente, ordenada al origen, tasa de cambio, traslación, función creciente y decreciente. -Cambio de atención del producto al proceso. - Considera la evolución de modelos lineales a modelos exponenciales.	-Importancia de las representaciones en la construcción de modelos compartibles y reutilizables. -Caracterización de los modelos con base en razonamiento covariacional. -Detalle de la evolución del conocimiento sobre la función exponencial. -La idea de covariación caracteriza al concepto de función. -Promoción y diferenciación de modelos lineales y exponenciales en términos de la tasa de cambio y su utilidad para describir fenómenos.
I	-Identificación de perspectivas didácticas en textos. -Enfoque en el interés hacia la actividad por los estudiantes. -Relevancia del dinamismo de las tecnologías y su potencial para crear representaciones. -Reconocimiento de los principios del significado personal, construcción del modelo y autoevaluación. -Evaluación con problemas del texto.	-Identificación de estrategias para apoyar el aprendizaje, mediante preguntas. -Incorporación de NetLogo para simular el crecimiento exponencial. -La tecnología como medio para explorar, conjeturar, evaluar y diferenciar crecimientos exponencial, logístico y lineal. -Revisa principios del significado personal, de construcción del modelo y autoevaluación. -Cambio de contextos para reutilizar y profundizar en conceptos aprendidos. Propone la MXA. -Identifica necesidades de dirección, extensión y refinamiento en modelos (compartibles y reutilizables).	-Diseño de MDS para profundizar en el concepto de función exponencial. -Interés en la transferencia de conocimiento a través de la MAA -Modelos compartibles y reutilizables. -Diferenciación entre funciones lineales y exponenciales. -Interés en satisfacer principios para el diseño de MEAs (documentación, prototipo simple y generalización). -Tecnología como auxiliar en la construcción de modelos que permiten a un cliente explorar y evaluar predicciones. -Cambio de contexto de la tarea. -Determinó por qué un concepto fue mejor comprendido.
H	-Descripciones	-Reconocimiento del proceso de	-Descripción de ciclos de modelación

	generales de los modelos finales de los estudiantes, sin mucha atención al proceso de construcción de modelos.	matematización por los estudiantes (“el proceso es el producto”). -Reconocimiento y validación de la aparición de modelos lineales. -Mejores descripciones de los modelos de los estudiantes con base en tipos de variación y covariación.	de los estudiantes y su evolución, con base en razonamiento covariacional -Creación de categorías para describir la evolución de los modelos (el proceso es el producto) -Identificación de una transferencia del conocimiento de los estudiantes. -Descripción de los modelos en su carácter compatible y reutilizable.
--	--	--	---

Cuadro 3 - Caracterización de los *sistemas conceptuales* del docente

Fuente: elaborado por los autores

Tal como lo señalan Doerr y Lesh (2003), el docente también evolucionó en su forma de responder o actuar en el salón de clase, fortaleciendo su comprensión del pensamiento lineal y exponencial a medida que observó la regularidad con la que emergen los modelos lineales (Dimensión instruccional). Estas experiencias, en cada una de las tres etapas, le permitieron ampliar y refinar su sistema conceptual generando descripciones más precisas en comparación con las que emergieron durante la etapa previa, para interpretar y evaluar lo ocurrido en el aula. Además, el docente reafirmó el aprendizaje de que durante la construcción de modelos, el proceso de matematización es incluso más importante que el modelo en sí mismo.

6 Reflexiones y Conclusiones

Respecto de la pregunta de investigación ¿Cómo se modifican las diferentes dimensiones del sistema conceptual de un profesor de matemáticas al estar inmerso en un programa de actualización docente multiestratos bajo el enfoque de la MMP? El docente modificó su manera de concebir el conocimiento matemático, en particular los conceptos de función lineal y función exponencial, los cuales se ampliaron para considerar los conceptos asociados, lo que le permitió acompañar a los estudiantes en la extensión y refinamiento de estos. El docente se concentró en el proceso de construcción de modelos por los estudiantes; se interesó en describir y documentar mediante categorías cómo los estudiantes desarrollaron los conceptos, cómo los relacionaron entre sí, y cómo generaron habilidades de representación. El docente aprendió a observar bajo qué circunstancias históricas emergieron los conceptos relacionados con la función exponencial; así como las representaciones y soluciones a los problemas planteados. Con apoyo del investigador, el docente fue refinando sus ideas acerca de cómo introducir la función exponencial y conceptos relacionados, y cómo se podía apoyar el desarrollo de habilidades mediante el uso de materiales curriculares. La interacción con el investigador y los estudiantes, así como la construcción, implementación y evaluación de las actividades MEA-MXA-MAA, que fueron dando lugar a la MDS, posibilitaron que el sistema

conceptual del profesor se modificara, ampliara y refinara.

El proceso de refinamiento iterativo del sistema conceptual del profesor aporta evidencia de que la actualización docente para la enseñanza de las matemáticas, mediante la modelación, requiere el acompañamiento de los profesores durante su práctica. Por lo tanto, coincidimos con Lewis (2016) respecto de la importancia de reestructurar los programas de actualización docente, que en su mayoría se limitan a talleres que dejan al profesor la tarea de profundizar en los conocimientos, y aplicarlos, por sí mismos, en sus prácticas.

Basados en nuestros hallazgos, encontramos en el enfoque multiestratos un medio para promover el refinamiento de sistemas conceptuales de los profesores, en el cual se valoran las aportaciones de los profesores, estudiantes e investigadores.

La actualización docente multiestratos, que incorpora el diseño de MDS, es una de las aportaciones metodológicas de esta investigación. Al incluir el diseño de MDS en la actualización docente, los profesores pueden desencadenar un proceso de refinamiento iterativo entre el diseño de la MDS y la ampliación y refinamiento de las dimensiones de su sistema conceptual. Adicionalmente, consideramos que las categorías de análisis de este estudio (Cuadro 1) podrían resultar útiles para investigaciones futuras que busquen describir el sistema conceptual de los profesores durante su participación en programas de actualización docente para la enseñanza de la modelación.

Este estudio también aporta a la ampliación de investigaciones en torno a la actualización docente multiestratos por la inclusión de la lectura y discusión de los fundamentos teóricos de la MMP entre el docente y el investigador durante el diseño de la MDS. Si bien el enfoque multiestratos fue fundamental para apoyar la evolución del sistema conceptual del docente, la discusión sobre elementos teóricos de la MMP impulsó al docente a modificar, ampliar y crear nuevas oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes.

7 Limitaciones

Reconocemos que existieron diferentes limitaciones. Una de ella es que se describe la evolución del sistema conceptual de solo un profesor, por lo tanto, es relevante desarrollar futuras investigaciones que permitan conocer otras trayectorias de evolución del sistema conceptual de los profesores, con el objetivo de seguir profundizando en el conocimiento de estos sistemas, que impulsen una mejora en los programas de actualización docente orientados a la enseñanza de las matemáticas, con base en la modelación. Además, debido al interés de este estudio se abordaron tres dimensiones del sistema conceptual, pero reconocemos que

pueden existir otras dimensiones que pueden ser exploradas para comprender a profundidad el sistema conceptual de los docentes. También se podrían identificar las variaciones que emergen cuando la MDS se genera en otros contextos y en otros niveles educativos.

Reconocimiento

Extendemos nuestro agradecimiento a la Universidad de Guadalajara y al proyecto Campus Viviente UTSA (<https://campusviviente.org/>). Cualquier opinión, hallazgo, conclusión o recomendación expresada en este material es responsabilidad exclusiva de los autores y no refleja necesariamente los puntos de vista de estas universidades.

Referencias

- ABASSIAN, A.; SAFI, F.; BUSH, S.; BOSTIC, J. Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. **Investigations in Mathematics Learning**, London, v. 12, n. 1, p. 53–65, jan. 2019. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>. Acceso en: 12 nov. 2023.
- ALBARRACÍN, L.; SEGURA, C.; FERRANDO, I.; GORGORIÓ, N. Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. **Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA**, Oxford, v. 41, s.n., p. 183-197, jan. 2022.
- ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 50, n. 1, p. 187-200, apr. 2018.
- BARQUERO, B.; JESSEN, B. E. Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, s.l., v. 17, s.n., p. 98–113, jun. 2020.
- BARQUERO, B.; SERRANO, L.; SERRANO, V. Creating necessary conditions for mathematical modelling at university level. In: DRIJVERS, P.; CSAPODI, C.; PALMÉR, H.; GOSZTONY, K.; HERENDINÉ-KÓNYA, E.(ed.). **Proceedings of CERME8**. Ankara: ERME; Middle East Technical University, 2013. p. 950-959. Disponible en: http://erme.site/wp-content/uploads/2021/06/CERME8_2013_Proceedings.pdf. Acceso en: 14 jun. 2024.
- BERRY, B. An investigation of teachers' shared interpretation of their roles in supporting and enhancing group functioning. In: LESH, R.; GALBRAITH, P. L.; HAINES, C. R.; HURFORT, A. (ed.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. Dordrecht: Springer, 2013. p. 471-480.
- BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, New York, v. 1, n. 1, p. 45-58, dec. 2009.
- BORROMEO FERRI, R. Mandatory Mathematical Modelling in School: What Do We Want the Teachers to Know? In: LEUNG, F. K. S.; STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; WONG, K. L. (ed.). **Mathematical modelling education in east and west**. Cham: Springer, 2021. p. 103–117. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_9. Acceso en: 3 nov. 2023.

BRADY, C. Modelling and the representational imagination. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 50, s.n., p. 45-59, apr. 2018. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4>. Acceso en: 20 nov. 2023.

CARREIRA, S. Teaching and learning mathematical modelling: A broad and diversified but specific research field. In: MARBÁN, J.M.; ARCE, M.; MAROTO, A.; MUÑOZ-ESCOLANO, J.M.; ALSINA, A. (ed.). **Investigación en educación matemática XXIII**. Valladolid: SEIEM, 2019, p. 65-87.

CORBIN, J.; STRAUSS, A. **Basics of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 2014.

CORUM, K.; GAROFALO, J. Engaging Preservice Secondary Mathematics Teachers in Authentic Mathematical Modeling: Deriving Ampere's Law. **Mathematics Teacher Educator**, Reston, v. 8, n. 1, p. 76-88, 2019. Disponible en: <https://doi.org/10.5951/matteaceduc.8.1.0076>. Acceso en: 11 nov. 2022.

DOERR, H. M. Designing sequences of model development tasks. In: HIRSCH, C. R.; MCDUFFIE, A. R. (ed.). **Mathematical modeling and modeling mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2016. p. 197-205.

DOERR, H. M.; LESH, R. A. Modeling perspective on teacher development. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (ed.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003. p. 125-140. Disponible en: <https://doi.org/10.4324/9781410607713>. Acceso en: 12 jun. 2023.

ENGLISH, L. D. Mathematical and interdisciplinary modeling in optimizing young children's learning. In: SUH, J. M.; WICKSTROM, M. H.; ENGLISH, L. D. (ed.). **Exploring mathematical modeling with young learners**. Cham: Springer, 2021. p. 3-23. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1. Acceso en: 3 nov. 2023.

ENGLISH, L. D.; ÄRLEBÄCK, J. B.; MOUSOULIDES, N. Reflections on progress in mathematical modelling research. In: GUTIÉRREZ, A.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (ed.). **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam: Sense Publisher, 2016. p. 383-413.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Relime**, Ciudad de México, v. 17, n. 3, p. 289-318, nov. 2014. Disponible en: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1732>. Acceso en: 3 nov. 2023.

FULTON, E.W.; WICKSTROM, M.H.; CARLSON, M.A.; BURROUGHS, E.A. Teachers as learners: Engaging communities of learners in mathematical modelling through professional development. In: STILLMAN, G.A.; BROWN, J.P. (ed.). **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education (ICME-13 Monographs)**. Cham: Springer, 2019. p. 125-142. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_7. Acceso en: 10 nov. 2023.

GARFUNKEL, S.; MONTGOMERY, M. (ed.). **Guidelines for assessment and instruction in mathematical modeling education**. Philadelphia: SIAM, 2019. Disponible en: <https://bit.ly/45t2YCF>. Acceso en: 10 nov. 2023.

GEIGER, V.; FREJD, P. A reflection on mathematical modelling and applications as a field of research: Theoretical orientation and diversity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). **Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive Influences**. Cham: Springer, 2015. p. 161-171.

HJALMARSON, M. A.; DIESFES-DUX, H. A.; MOORE, T. J. Models and modeling in engineering education. In: ZAWOJEWSKI, J. S.; DIESFES-DUX, H. A.; BOWMAN, K. (ed.). **Designing model development sequences for engineering**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 37-54.

KAISER, G; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, Berlin, v. 38, n. 3, p. 302-310, jun. 2006.

KAMINSKI, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A. Transfer of mathematical knowledge: The portability of generic instantiations. **Child Development Perspectives**, s.l., v. 3, n. 3, p. 151-155, nov. 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00096.x>. Acesso em: 3 nov. 2023.

KELLY, A.; LESH, R. (ed.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.4324/9781410602725>. Acesso em: 20 mar. 2023.

KERTIL, M.; ERBAS, A.K.; CETINKAYA, B. Pre-service mathematics teachers' understanding of rate of change throughout a model development sequence. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taipei, v. 21, s.n., p. 1769-1796, oct. 2023.

KOELLNER-CLARK, K. K.; LESH, R. A modeling approach to describe teacher knowledge. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (ed.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003. p. 159-174. Disponível em: <https://doi.org/10.4324/9781410607713>. Acesso em: 6 mar. 2023.

LEDEZMA, C.; BREDÁ, A.; FONT, V. Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. **International Journal of Science and Mathematics Education**, s.l., v. 22, s.n., p. 1057-1081, aug. 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8>. Acesso em: 1 jun. 2024.

LESH, R. Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. **Journal of Mathematical Modeling and Application**, s.l., v. 1, n. 2, p. 16-48, jul. 2010. Disponível em: <https://bit.ly/3OVZ4LN>. Acesso em: 12 mar. 2024.

LESH, R.; CARMONA, G. Piagetian conceptual systems and models for mathematizing everyday experiences. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (ed.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003. p. 71-96. Disponível em: <https://doi.org/10.4324/9781410607713>. Acesso em: 12 nov. 2023.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (ed.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003. p. 3-34. Disponível em: <https://doi.org/10.4324/9781410607713>. Acesso em: 12 mar. 2023.

LESH, R.; DOERR, H.; CRAMER, K., POST, T.; ZAWOJEWSKI, J. Model Development Sequences. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (ed.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003. p. 35-58. Disponível em: <https://doi.org/10.4324/9781410607713>. Acesso em: 10 abr. 2023.

LESH, R.; HAMILTON, E.; KAPUT, J. J. **Foundations for the future of mathematics education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2007.

LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thought-

revealing activities for students and teachers. In: KELLY, A.; LESH, R. (ed.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 591-645. Disponible en: <https://bit.ly/3qxHANq>. Acceso en: 12 mar. 2023.

LEWIS, J. M. Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 48, n. 4, p. 527-540, jan. 2016. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0753-9>. Acceso en: 12 mar. 2023.

MAKAR, K.; DOERR, H.; DELMAS, R. Developing statistical modeling with paper helicopters. **Mathematics Teacher: Learning and Teaching** Pk–12, s.l., v. 113, n. 2, p. 147-151, feb. 2020. Disponible en: <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0243>. Acceso en: 12 mar. 2023.

MARTÍNEZ, M. V.; ARAYA, P.; BERGER, B. Descripción del cambio del profesor de matemática desde su propia perspectiva a partir de una experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 984-1004, dic. 2017.

MONTERO-MOGUEL, L.; VARGAS-ALEJO, V. Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. **Educación Matemática**, s.l., v. 34, n. 1, p. 214–248, abril. 2022. Disponible en: <https://doi.org/10.24844/EM3401.08>. Acceso en: 10 mar. 2023.

NATIONAL ACADEMY OF ENGINEERING; NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **STEM integration in K-12 education: status, prospects, and an agenda for research**. Washington, D.C.: National Academies Press, 2014.

OTZEN, T.; MANTEROLA, C. Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. **International Journal of Morphology**, Temuco, v. 35, n. 1, p. 227-232, mar. 2017. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037>. Acceso en: 1 mar. 2023.

SAMARAS, A. P.; HJALMARSON, M.; BLAND, L. C.; NELSON, J. K.; CHRISTOPHER, E. K. Self-study as a method for engaging STEM faculty in transformative change to improve teaching. **International Journal of Teaching and Learning in Higher Education**, s.l. v. 31, n. 2, p. 195-213, 2019. Disponible en: <https://eric.ed.gov/?id=EJ1224430>. Acceso en: 6 mar. 2023.

SCHORR, R. Y.; KOELNER-CLARK, K. Using a modeling approach to analyze the ways in which teachers consider new ways to teach mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 5, n. 2-3, p. 191-210, 2003.

SEVINC, S.; LESH, R. Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 50, n. 1, p. 301-314, apr. 2018. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>. Acceso en: 6 mar. 2023.

SIMONS, H. **El estudio de caso: teoría y práctica**. Madrid: Morata, 2012.

STAKE, R. E. Qualitative case studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. (ed.). **The SAGE handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 2005. p. 443-466.

STILLMAN, G.A. State of the art on modelling in mathematics education—lines of inquiry. In: STILLMAN, G.A.; BROWN, J.P. (ed.). **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education (ICME-13 Monographs)**. Cham: Springer, 2019. p. 1-20. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1. Acceso en: 8 mar. 2023

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In: CAI, J. (ed.). **Compendium for research in mathematics education**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2017. p. 421-456.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA. **Unidad de Formación, Capacitación y Actualización Docente**. 2023. Disponible en: <https://bit.ly/3sMfI9l>. Acceso en 10 nov. 2023.

VARGAS-ALEJO, V.; MONTERO-MOGUEL, L. Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando brechas entre investigación y práctica. *In*: CASTAÑEDA (ed.). **Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática**. Ciudad de México: SOMIDEM, 2023. p. 69-96. Disponible en: <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-03>. Acceso en: 11 jun. 2023.

WASBURN, M. H. Mentoring women faculty: An instrumental case study of strategic collaboration. **Mentoring & Tutoring**, London, v. 15, n.1, p. 57-72. jan. 2007. Disponible en: <https://doi.org/10.1080/13611260601037389>. Acceso en: 1 jun. 2023.

WIEGAND, S.; BORROMEO FERRI, R. Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 55, s.n., p. 1269-1282, jun. 2023. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01500-8>. Acceso en: 12 mar. 2024.

YIN, R. K. **Case study research and applications: Design and methods**. Thousand Oaks: Sage, 2018.

Submetido em 08 de Setembro de 2023.
Aprovado em 01 de Fevereiro de 2024.