
ARTÍCULO

Contradicciones en la formación inicial de profesores de matemáticas: Un estudio sobre el aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra**Contradictions in the initial mathematics teacher education: A study on the learning of Euclidean constructions with GeoGebra**Juan Luis **Prieto-González*** ORCID iD 0000-0003-0798-5191Rafael Enrique **Gutiérrez-Araujo**** ORCID iD 0000-0002-4003-8324Elizabeth-H. **Arredondo***** ORCID iD 0000-0002-5285-1603**Resumen**

La presente investigación tiene que ver con las contradicciones dialécticas y su relación con el aprendizaje de saberes geométricos en la formación inicial de profesores de matemáticas. En particular, analizamos la manera en que un futuro profesor y el formador enfrentan una contradicción de este tipo, mientras resuelven colectivamente un problema de construcción con GeoGebra, y ofrecemos una explicación de cómo lo anterior contribuye al aprendizaje de la geometría movilizada en la actividad. Para ello, nos posicionamos en una perspectiva educativa histórico-cultural para analizar un episodio en que un futuro profesor y el formador dialogan sobre la respuesta al problema de construir un triángulo isósceles con GeoGebra. Este análisis se realizó en dos etapas para captar el movimiento de ascenso de lo abstracto a lo concreto del objeto de estudio. Los resultados incluyen la descripción de tres acciones formativas que aportan información del modo en que surgió y se enfrentó una contradicción conceptual, y una explicación de cómo esto contribuyó al aprendizaje del saber movilizado. Concluimos que la manera en que la contradicción fue enfrentada por los participantes favoreció la toma de conciencia del saber y permitió la ruptura de la relación práctico-utilitarista que el futuro profesor mantuvo con la tarea.

Palabras clave: Formación de profesores de matemáticas. Teoría de la objetivación. Contradicciones. Construcciones geométricas.

* Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos (ULAGOS), Chile. Académico de la Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Arturo Prat (UNAP), Iquique, Tarapacá, Chile. E-mail: juprieto@unap.cl.

** Magister en Enseñanza e Historia de las Ciencias y de la Matemática por la Universidad Federal de ABC (UFABC), Brasil. Coordinador de Formación de la Asociación Aprender en Red (APRENRED), Maracaibo, Zulia, Venezuela. E-mail: rafael.gutierrez0593@gmail.com.

*** Doctora en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV-IPN, México. Académica del Departamento de Ciencias Exactas y Jefa del Magister en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos (ULAGOS), Osorno, Chile. E-mail: elizabeth.hernandez@ulagos.cl.

Abstract

This research deals with dialectical contradictions and their relationship with the learning of geometric knowledge in the initial mathematics teacher education. Specifically, we analyze how a pre-service teacher and the teacher educator handle such a contradiction while collectively solving a construction problem using GeoGebra, and we offer an explanation of how this contributes to the learning of geometry mobilized in the activity. To do so, we adopted a historical-cultural educational perspective to analyze an episode in which a pre-service teacher and the teacher educator engage in a dialogue regarding the solution to the problem of constructing an isosceles triangle with GeoGebra. This analysis was carried out in two stages to capture the movement from the abstract to the concrete in the object of study. The results include the description of three formative actions that provide information on how a conceptual contradiction emerged and was confronted, as well as an explanation of how this contributed to the learning of the mobilized knowledge. We conclude that the way in which the contradiction was addressed by the participants facilitated awareness of the knowledge and allowed for the break from the practical-utilitarian relationship that the pre-service teacher maintained with the task.

Keywords: Mathematics teacher education. Theory of objectification. Contradictions. Geometric constructions.

1 Introducción

La visión del aula de matemáticas que se tenga varía según el paradigma educativo desde el cual nos posicionamos. Según Radford (2021), dos formas de entenderla han dominado el escenario educativo de los últimos cincuenta años. Desde el paradigma de la transmisión de saberes, el aula de matemáticas se concibe como ese espacio en donde los estudiantes adquieren los contenidos matemáticos de una forma pasiva y obediente. Desde el paradigma constructivista, el aula se concibe como un espacio de promoción de la autonomía intelectual del estudiante, lo que implica entregar a éste la responsabilidad de su propio aprendizaje. En contraste con estos paradigmas, una perspectiva educativa histórico-cultural entiende el aula de matemáticas como un espacio social de realización personal y colectiva en donde profesores y estudiantes se coproducen como sujetos históricos, condicionados por la cultural a la que pertenecen (Radford; Lasprilla, 2020).

Indistintamente del paradigma educativo que asumamos, el aula de matemáticas no está exenta de las *tensiones* que surgen, ineludiblemente, a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje desplegado en ella. De hecho, Radford (2023, p. 101) concibe el aprendizaje como un encuentro continuo y tenso entre “entre un mundo cultural y los individuos únicos que se encuentran con él”. De allí que profesores y estudiantes se vean en la necesidad de lidiar con las situaciones de tensión que emergen en el aula de matemáticas.

Lo anterior no es exclusivo de los contextos escolares más elementales. En contextos de formación inicial de profesores de matemáticas, el aula también puede entenderse como un espacio de realización de formadores y futuros profesores, desde donde estos sujetos pueden experimentar tanto placer como frustración. En este sentido, el aprendizaje de los futuros

profesores de matemáticas (FPM) en las aulas universitarias implica la coexistencia permanente con tensiones que surgen, especialmente, cuando ellos se acercan a los objetos matemáticos que deberán enseñar a futuro (Paula; Cyrino, 2018).

En la dialéctica-materialista, tensiones como las vivenciadas por los FPM durante su formación conducen a lo que se conoce como *contradicciones*. Actualmente, existe cierta literatura sobre las contradicciones y su contribución al desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ejercicio (Goodchild; Jaworski, 2005; Harvey; Nilsson, 2022; Stouraitis; Potari; Skott, 2017; Yamagata-Lynch; Haudenschild, 2009). No obstante, se cuenta con poca literatura sobre el tema de las contradicciones y su contribución al aprendizaje de los FPM, hecho que llama la atención si pensamos en la afirmación dialéctico-materialista de que la contradicción es el motor que impulsa el desarrollo de la propia existencia humana (Tse-Tung, 2014).

Con la intención de aportar elementos que contribuyan a esta discusión, en este artículo nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cómo la manera en que se enfrentan las contradicciones surgidas durante la resolución de un problema de construcción con GeoGebra, en un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas, contribuye al aprendizaje de los saberes geométricos movilizados en la actividad?

2 Marco teórico

Para responder la pregunta de investigación, partimos fijando posición sobre el significado del aprendizaje de saberes geométricos en contextos de formación inicial de profesores de matemáticas y su relación con las contradicciones. Apoyados en la teoría de la objetivación (TO), asumimos el aprendizaje como *procesos de objetivación*¹, es decir, como aquellos “procesos activos, corpóreos, discursivos, simbólicos y materiales por medio de los que los estudiantes encuentran, notan y se familiarizan críticamente con sistemas de pensamiento, reflexión y acción histórica y culturalmente constituidos” (Radford, 2023, p. 44). Dado que solo mediante el prisma de la actividad es posible comprender el modo en que las contradicciones emergen, evolucionan y eventualmente son superadas (Iliénkov, 1977), valoramos la concepción de aprendizaje de la TO por el énfasis que coloca en la actividad práctica de estudiantes y profesores como categoría central para explicar el modo en que los saberes culturales se revelan a nuestra consciencia.

En síntesis, los procesos de objetivación que ocurren en *actividades de formación inicial*

¹ En la TO, “el aprendizaje es tanto conocer como devenir” (Radford, 2017a, p. 97). Sin embargo, adoptamos en la investigación una aproximación al aprendizaje desde la vertiente del conocimiento.

de profesores de matemáticas constituyen actos progresivos de *toma de conciencia* de determinados *saberes docentes* movilizados en cada actividad. En esta concepción de aprendizaje destacan las tres ideas que desarrollamos en los siguientes apartados.

2.1 Saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra

Por construcciones euclidianas entendemos aquellas construcciones geométricas con regla y compás que aparecen en la obra *Elementos* de Euclides y que siguen presentes en el currículo de matemáticas chileno (Iturra *et al.*, 2019). Si bien la regla y el compás han sido los artefactos de construcción geométrica por excelencia, también es cierto que el *software dinámico* es cada vez más utilizado en la resolución de construcciones euclidianas dentro de la escuela. De hecho, este artefacto digital ha adquirido una relevancia notable en los procesos de formación didáctica y disciplinaria en geometría del profesorado de matemáticas en Chile (MINEDUC, 2021).

En este artículo, las construcciones euclidianas con GeoGebra evocan conscientemente un saber docente que el profesor moviliza cuando, por ejemplo, utiliza GeoGebra para construir un triángulo isósceles a partir del tamaño de sus lados, tratando de reconocer en este problema su potencial geométrico para el logro de un objetivo de aprendizaje (Groenwald; Llinares, 2022). Este saber, al que decidimos llamar *saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra* (SACEG), se entiende como “*un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente*” (Radford, 2017a, p. 101, énfasis en el original), que a su vez se nutre de saberes específicos de la formación inicial de profesores de matemáticas que incluyen el *saber disciplinario* (Tardif, 2002) que la tradición cultural ha producido y que las universidades difunden por medio de asignaturas o cursos de geometría euclidiana y su didáctica.

En cuanto a GeoGebra, es importante destacar su relevancia actual en los procesos de formación didáctica y disciplinaria del profesorado de matemáticas de Chile, según el Ministerio de Educación (MINEDUC, 2021). Apoyados en las ideas de Radford (2014), consideramos este *software* como un *artefacto cultural* de naturaleza digital que ofrece a los usuarios una serie de *contenidos conceptuales* en la forma de herramientas de construcción, y un *espacio de trabajo* (apariencia *Geometría*) estructurado conceptualmente para experimentar con los contenidos y producir formas novedosas de construir dibujos dinámicos.

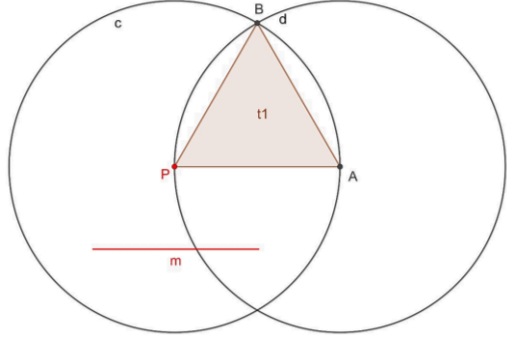
Por ejemplo, si se desea construir con GeoGebra un triángulo equilátero, conocidos el tamaño de sus lados (cantidad de longitud del segmento m) y uno de sus vértices (punto P), la

herramienta *Polígono* ofrece un modo de proceder guiado por la localización de los demás vértices del triángulo (Figura 1), el cual adquiere una forma material en las *acciones* de construcción que resultan necesarias para el logro de la respuesta. En este modo de proceder subyace una idea moderna del triángulo como “una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos” (Godino; Ruíz, 2002, p. 465), cuyas propiedades fundamentales pueden ser reconocidas o no por los futuros profesores a lo largo de la construcción. En este estudio, llamamos *conceptualización* al contenido conceptual que subyace en la herramienta *Polígono*.



Figura 1 – Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente
Fuente: los autores

Dado que P es uno de los vértices del triángulo equilátero, su construcción por medio de la herramienta *Polígono* requiere de las siguientes acciones: localizar el segundo vértice del triángulo (A_1), localizar el tercer vértice del triángulo (A_2) y dibujar el triángulo (A_3). Cada acción se realiza por medio de *operaciones* con el software ($O_1, O_2, \dots, O_5$) que conducen progresivamente al dibujo dinámico esperado. El Cuadro 1 proporciona un ejemplo de estas acciones y de las operaciones correspondientes que entregan una respuesta al problema anterior.

Acciones y operaciones	Dibujo dinámico
A_1: Localizar el segundo vértice O_1: Construir la circunferencia c con centro P y radio m - <i>Circunferencia: centro y radio</i> O_2: Fijar un punto A en la circunferencia c - <i>Punto</i> A_2: Localizar el tercer vértice O_3: Construir la circunferencia d con centro A y que pasa por P - <i>Circunferencia (centro, punto)</i> O_4: Intersecar las circunferencias c y d en el punto B - <i>Intersección</i> A_3: Dibujar el triángulo O_5: Dibujar el triángulo t_1 con vértices P, A y B - <i>Polígono</i>	

Cuadro 1 - Procedimiento de construcción del triángulo equilátero
Fuente: los autores

Llamamos *procedimiento de construcción* al conjunto de acciones y operaciones con el *software* que se realizan con la intención de entregar una respuesta a la construcción euclidiana con GeoGebra (un problema de construcción) propuesta. En esta investigación, la importancia de estos procedimientos radica en su producción, pues es ahí donde las contradicciones emergen y evolucionan para favorecer o no la toma de conciencia del SACEG.

2.2 Toma de conciencia del SACEG

Según la TO, la toma de conciencia del saber implica una *reflexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre la realidad objetiva y el individuo “que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios” (Radford, 2006, p. 108). Así, la toma de conciencia del SACEG puede entenderse como una manera específicamente humana de *reflexión subjetiva* y de *discernimiento crítico* sobre un determinado objeto geométrico, cuyas propiedades fundamentales se muestran (y se ocultan) en el procedimiento de construcción con GeoGebra correspondiente.

Es por medio de la toma de conciencia del SACEG que los futuros profesores forman cierta sensibilidad cultural que les permite orientarse e intervenir responsablemente en la producción de sus procedimientos de construcción con GeoGebra. Un aspecto a destacar de los procesos de toma de conciencia es que la causa fundamental de su desarrollo no se encuentra fuera de los actos de reflexión y discernimiento que le constituyen, sino dentro de sí mismos, en su “carácter contradictorio interno” (Tse-Tung, 2014, p. 7). Por lo tanto, se tiene que la toma de conciencia del SACEG ocurre mientras se producen procedimientos de construcción con GeoGebra que, a su vez, portan contradicciones que pueden actuar como fuerza impulsora de las acciones y reflexiones de los sujetos hacia la búsqueda de respuestas compartidas.

Según la filosofía dialéctico-materialista, la contradicción es una categoría dinámica inherente a todo *fenómeno o proceso* de la realidad, la cual se revela al pensamiento mediante la lucha entre contrarios que coexisten como una unidad concreta (Iliénkov, 1977; Kosík, 1967; Spirkin, 1969). Por ejemplo, una contradicción relacionada con el uso de GeoGebra en la producción colectiva de un procedimiento como el del Cuadro 1 se expresa en la negación recíproca de dos modos distintos de proceder con el *software*, uno impregnado de la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono* y otro que, al no estarlo, queda a merced de la experiencia práctico-sensorial de los futuros profesores con los dibujos geométricos en papel y lápiz, lo que alimenta una manera de pensar en el triángulo como la reunión de segmentos unidos dos a dos por sus extremos (y no como porción de plano).

En la lucha entre ambos modos de proceder, los futuros profesores tienen la oportunidad de transformar las propiedades fundamentales del objeto geométrico que se trate (p. ej., las relaciones métricas entre los lados del triángulo) en objeto de conciencia y de discernimiento crítico. Esto implica aceptar tanto que las contradicciones habitan en los procedimientos de construcción con GeoGebra de los futuros profesores, como que tales contradicciones otorgan movimiento y dirección a la toma de conciencia del SACEG. Es por esto que tales

procedimientos son importantes para la investigación, ya que es a través de su producción en el aula que podemos explicar cómo surgen y evolucionan las contradicciones que habitan en los modos de proceder de los estudiantes y cómo la forma en que éstas son tratadas puede contribuir al aprendizaje del SACEG. Esta concepción de aprendizaje implica realizar un importante esfuerzo físico, mental, emocional y colectivo, un desgaste de energías que la TO define como *labor conjunta*.

2.3 Labor conjunta alrededor de los procedimientos de construcción con GeoGebra

Si bien la producción de procedimientos de construcción con GeoGebra es una oportunidad para el aprendizaje del SACEG, las contradicciones que habitan en estas obras sugieren la posibilidad de que las propiedades fundamentales de los objetos geométricos evocados en ellas *objeten* los modos de proceder de los futuros profesores. En otras palabras, los procedimientos de construcción con GeoGebra pueden *ocultar* la esencia del SACEG movilizado en la formación, lo que hace necesario transitar por un camino que conduzca al encuentro crítico con este saber. En la TO, el saber "se crea y recrea por medio de la actividad histórico-cultural sensual y sensible. El saber solo puede llegar a la existencia sensible mediante la actividad práctica y colectiva; es decir, la actividad con otros " (Radford, 2023, p. 35). Para destacar su carácter de espacio de inscripción en la sociedad, la TO se refiere a la actividad del aula de matemáticas como *labor conjunta*.

En esta investigación, asumimos que la producción de un procedimiento de construcción con GeoGebra ocurre a través de una actividad de formación inicial que es corpórea, sensorial y artefactual, y que eventualmente puede llegar a constituirse en una labor conjunta, de acuerdo con el proyecto didáctico del formador. Inmersos en esta actividad, los futuros profesores y el formador trabajan juntos en la búsqueda de respuestas al problema de construcción euclidiana que ha desencadenado el procedimiento en cuestión. Este modo colectivo de proceder con el software da cuenta de una forma sensible y material de pensar sobre el objeto geométrico de la construcción que, en la TO, recibe el nombre de *obra común* (Radford, 2023).

Esta labor conjunta ocurre en un espacio-tiempo de formación compartido y repleto de medios, fines, instrumentos, demandas y esfuerzos particulares y colectivos (Kosík, 1967), lo que propicia la emergencia de tensiones debido a las contradicciones conceptuales y emocionales de las que está hecha la obra común (Radford, 2023). Bajo estas condiciones se genera esta obra y, al generarse, los futuros profesores se encuentran con formas históricas y culturales de pensar geométricamente (el SACEG en movimiento), de las cuales pueden tomar

consciencia de manera progresiva y crítica.

En definitiva, nuestro posicionamiento teórico nos revela vínculos entre el aprendizaje del SACEG y las contradicciones internas en los modos de proceder de los futuros profesores al resolver problemas de construcción con GeoGebra orientados al encuentro con este saber. Para aportar evidencia empírica que respalde nuestra comprensión de este fenómeno, hemos formulado los siguientes objetivos de investigación:

1. Describir la manera en que una contradicción surge y es enfrentada durante la actividad desplegada por un futuro profesor de matemáticas y el formador, alrededor de la resolución de un problema de construcción con GeoGebra.
2. Ofrecer una explicación de cómo el modo en que se enfrenta la contradicción contribuye al aprendizaje del SACEG movilizado durante la actividad.

3 Metodología

3.1 Participantes y contexto

Este artículo se enmarca en un proyecto de investigación doctoral (Prieto, 2022) cuyo objetivo fue analizar las condiciones para el diseño, la implementación y evaluación de una actividad de formación inicial docente en matemáticas, orientada al aprendizaje del SACEG desde una perspectiva educativa histórico-cultural. Esta actividad de formación se implementó en tres ocasiones, con FPM pertenecientes a tres universidades de Chile.

En el segundo semestre de 2019, esta actividad se implementó mediante la asignatura *Optativa de Especialización II*, ubicada en el 8º semestre de una carrera de Pedagogía en Matemáticas de diez semestres de duración. Esta asignatura buscaba promover el desarrollo de competencias en los FPM para resolver problemas matemáticos, considerando la detección de dificultades y la aplicación de alternativas de solución. Además, también se buscaba que los estudiantes manifestaran un compromiso ético con la asignatura, basado en principios y valores de justicia, bien común y de dignidad a expresarse en el contexto profesional.

La matrícula de la asignatura fue de tres estudiantes quienes, para el momento de la investigación, habían cursado asignaturas de formación general, disciplinaria y profesional en las que ocasionalmente se utilizó GeoGebra con diferentes propósitos. De este modo, los FPM tenían familiaridad con este *software*, lo que les permitió enfrentar las tareas de construcción elaboradas *ad hoc* para la actividad de formación. A lo largo de cinco encuentros de 90 minutos cada uno, se aplicaron cuatro tareas que demandaban a los FPM *construir* dibujos dinámicos

representativos de objetos geométricos, *comunicar* los procedimientos de construcción empleados y *justificar* estos procedimientos. Las construcciones debían producirse en hojas de trabajo (archivos de GeoGebra, versión 5.0) con las condiciones iniciales de cada tarea.

La tarea 4 fue aplicada en el cuarto encuentro y consistió en tres problemas de construcción sobre triángulos y cuadriláteros. El primer problema (de interés para esta investigación) demandaba la construcción con GeoGebra de un triángulo isósceles, conocidos un vértice (punto P) y el tamaño de dos lados (m y n). Sobre el tamaño de los lados, se tomó como condición del problema que $2m < n$, de manera que éste admitiera una única solución: aquella en la que m representa el tamaño del lado desigual del triángulo (en adelante, la *base*). Una respuesta a este problema fue producida por Gonzalo² (Figura 2), en un instante anterior a los hechos reportados en este artículo³.

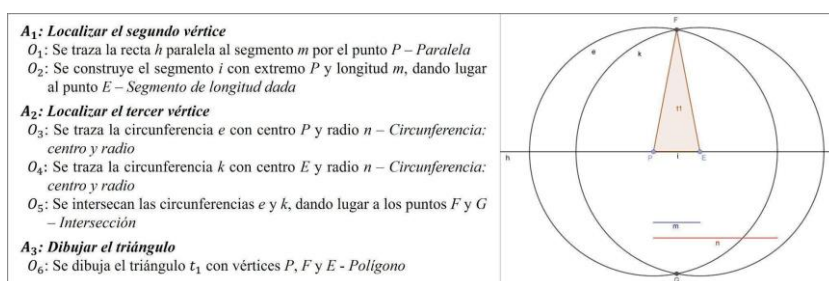


Figura 2 – Procedimiento de construcción del triángulo isósceles de Gonzalo
Fuente: datos de la investigación

Aunque el procedimiento de la Figura 2 entregaba una solución al problema, esta respuesta tenía como característica la determinación del segundo vértice del triángulo mediante el trazado de un segmento de longitud m (O_2) que no se vinculaba a la recta h (O_1), haciendo innecesaria esta última operación. Dada la ausencia del uso de circunferencias para transportar medidas, el formador invitó a Gonzalo a pensar en otro modo de proceder que no implicara el uso de la herramienta *Segmento de longitud dada* (O_2).

Esta investigación se sitúa en este contexto. Específicamente, analizamos el fragmento de la actividad de Gonzalo y el formador en el que ellos dialogaron sobre la nueva respuesta al problema (en adelante, *episodio*). En este episodio observamos cómo surge una contradicción conceptual cuyo tratamiento por los participantes revela vestigios de una posible contribución al aprendizaje del SACEG movilizado en la actividad.

3.2 Recolección y producción de los datos

² Pseudónimo usado para identificar al futuro profesor, quien cursaba el último año de carrera.

³ Lo que se quiere decir con esto es que la respuesta de Gonzalo al problema (Figura 2) no forma parte del episodio analizado en este artículo, aunque se haya producido en la misma actividad de formación.

La información analizada en este artículo se recabó mediante la *observación participante* (Flick, 2007), usando como instrumentos: (i) la grabación de audio y vídeo de la actividad de los participantes; (ii) fotografías de lo escrito en la pizarra; y (iii) un diario con anotaciones sobre los acontecimientos importantes del encuentro. Otro instrumento que usamos fue la hoja de trabajo con la respuesta de Gonzalo producida durante la actividad.

Los datos se produjeron en dos momentos: (i) transcripción de los diálogos usando el instrumento del Cuadro 2; e (ii) incorporación a la transcripción de imágenes del instante correspondiente a cada enunciado, destacando los elementos de interacción interpersonal y de comunicación no verbal que no podían traducirse por escrito (Powell; Silva, 2015).

Vídeo:		Materia prima	
Tarea GGB-4b:		Procedimiento de construcción:	Dibujo dinámico:
Herramienta usada:			
Definición de la herramienta:			
Línea Nº	Contenido de la transcripción		Comentarios
1			
2			

Cuadro 2 – Instrumento utilizado para la producción de los datos
Fuente: datos de la investigación

3.3 Análisis de los datos

Los datos capturan una realidad concreta y caótica, en la que ha ocurrido un proceso de objetivación del SACEG que podemos explicar en términos del modo en que los participantes enfrentaron las contradicciones surgidas en su seno. Para ofrecer esta explicación, el análisis se inspiró en el *método dialéctico-materialista* (Gadotti, 1995; Moretti; Martins; Souza, 2017), el cual consiste en analizar sistemáticamente los aspectos contradictorios de una realidad para comprenderla en el conjunto de su movimiento, a través de lo que, en la terminología dialéctico-materialista, se conoce como el *ascenso de lo abstracto a lo concreto*. De acuerdo con Dávidov (1988, p. 150), este ascenso se da en dos etapas:

[...] 1) sobre la base del análisis de los datos fácticos y su generalización se separa la abstracción sustancial, que fija la esencia del objeto concreto estudiado [...]; 2) luego, por vía de la revelación de las contradicciones [en la abstracción sustancial] y de la determinación del procedimiento para su solución práctica, sigue la ascensión desde la esencia abstracta y de la relación universal no desmembrada a la unidad de los aspectos diversos del todo en desarrollo, a lo concreto.

A partir de lo anterior, definimos dos etapas para el análisis. En la *primera etapa* realizamos lecturas sucesivas a la transcripción para identificar la dinámica y estructura del episodio (Moura, 2004), en atención a las tensiones experimentadas por los participantes en la

toma de conciencia del SACEG movilizado. Como resultado, describimos tres acciones formativas (*percibir, reconocer y posicionarse*) que, en su conjunto, aportan información sobre el modo en que surgió y se enfrentó la contradicción en la respuesta de Gonzalo.

En la *segunda etapa* analizamos el desarrollo de las tres acciones formativas, tomando como principio la primera ley de la dialéctica-materialista, conocida como *ley de unidad de los contrarios*. De acuerdo con Albó (1962), esta ley se define a partir de tres aspectos: *unidad, lucha e interpenetración*. El primer aspecto establece que toda cosa está compuesta por dos polos opuestos necesariamente ensamblados entre sí, lo que da cuerpo a la contradicción. El segundo aspecto sugiere que los polos opuestos de una contradicción se mantienen en constante lucha, conservando en movimiento el desarrollo del proceso de toda cosa. Finalmente, el tercer aspecto sostiene que los polos opuestos de una contradicción no se anulan entre sí, sino que se transforman en una nueva síntesis de determinaciones.

Lo anterior nos guio en el reconocimiento de una contradicción conceptual que habitaba en el procedimiento de construcción de Gonzalo, permitiéndonos evidenciar tanto los polos opuestos de esta contradicción, como el modo en que éstos lucharon en el episodio hasta transformarse en una nueva síntesis de determinaciones. Sobre los polos opuestos, nos fijamos en un hecho puntual: el estado de tensión de los participantes ante el modo de proceder de Gonzalo al inicio del episodio. En síntesis, consideramos: (a) el lugar ocupado por los polos opuestos en el episodio; (b) la relación de interdependencia entre estos polos; y (c) los medios empleados por éstos en la lucha con su contrario (Tse-Tung, 2014). Esta etapa resultó en una explicación de cómo el manejo de la contradicción conceptual en el episodio contribuyó al aprendizaje del SACEG movilizado.

4 Resultados y discusión

4.1 Acciones formativas

El análisis nos permitió identificar tres acciones formativas (*percibir, reconocer y posicionarse*) que dan cuenta de la manera en que una contradicción surgió y fue enfrentada por Gonzalo y el formador durante el episodio. Los datos sugieren que estas acciones se originaron a partir de las diferencias entre el procedimiento de construcción de Gonzalo (materia prima de la actividad) (Figura 3a) y la respuesta esperada por el formador. Tales diferencias dieron lugar a una contradicción conceptual que orientó las acciones y reflexiones de los participantes hacia la producción de la obra común, por medio de la cual buscaron superar

las tensiones existentes (Figura 3b).

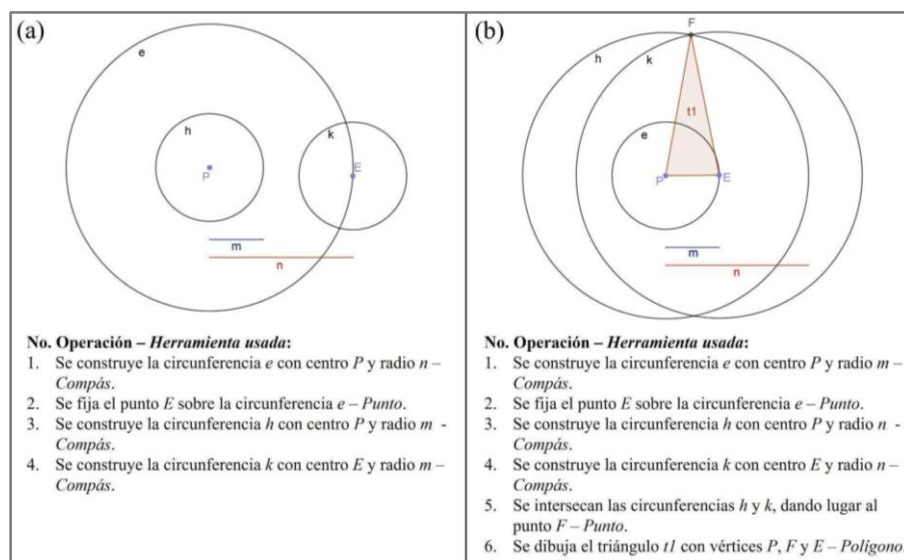


Figura 3 – Procedimientos de construcción surgidos al inicio y final del episodio

Fuente: datos de la investigación

4.1.1 Percibir

La primera acción formativa comienza cuando Gonzalo realiza el procedimiento de construcción de la Figura 3a, al mismo tiempo que explica al formador cada operación que utiliza. Después de llevar a cabo O_3 y O_4 , Gonzalo y el formador *percibieron* la ausencia de algún punto de intersección entre las circunferencias h y k (Figura 3a), lo cual dificultaba la ubicación del tercer vértice del triángulo. A la luz del marco teórico, la ausencia de intersección provocó en los participantes cierta reacción de sorpresa que se transformó en curiosidad espontánea y les movió a prestarle atención. De hecho, los datos muestran que Gonzalo realizó O_3 y O_4 (tal como lo había hecho para el procedimiento anterior), aunque expresó cierta cautela sobre la efectividad de estas operaciones (línea 12) ante la pregunta del formador (línea 11).

[11] *Formador: Listo. Ahora, ¿qué sigue?*

[12] *Gonzalo: Ahora... Esto es lo que no sé si va a funcionar, pero debería* [selecciona la herramienta *Compás* de GeoGebra]. *Con la función Compás...* [realiza las operaciones O_3 (Figura 4a) y O_4 (Figura 4b) de la Figura 3a] (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

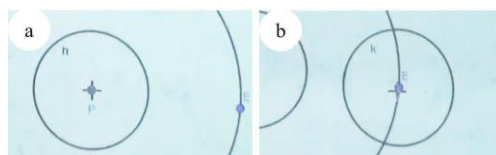


Figura 4 – Operaciones O_3 y O_4 realizadas por Gonzalo

Fuente: datos de la investigación

Llama la atención que el acto de percibir en esta acción formativa estuviera marcado por la emocionalidad de los participantes, en razón de la ausencia de algún punto de intersección

entre h y k . Efectivamente, tanto Gonzalo como el formador expresaron sus emociones ante dicha ausencia a través de gestos de sorpresa (línea 13), negación (línea 14), confusión (línea 15), incertidumbre (línea 16) y curiosidad (línea 17). Sin embargo, el futuro profesor comenzó a buscar una explicación lógica para este hecho hacia el final de este diálogo (línea 18).

[13] *Formador*: [se queda mirando la construcción con extrañeza].

[14] *Gonzalo*: *No se puede.*

[15] *Formador*: *¿Cómo?*

[16] *Gonzalo*: [guarda silencio].

[17] *Formador*: *¿Qué pasó?*

[18] *Gonzalo*: *Que yo necesito la intersección para poder hacer ese triángulo* [se refiere al punto de intersección entre las curvas h y k] (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

La falta de un punto de intersección entre las curvas h y k movió a los participantes a pensar en una explicación de este hecho, dando lugar a la siguiente acción formativa.

4.1.2 Reconocer

La segunda acción formativa da cuenta del modo en que Gonzalo y el formador *reconocieron* en la desigualdad triangular la propiedad fundamental que permitía explicar la ausencia de un punto de intersección entre las circunferencias h y k . Esto fue posible gracias a la actividad semiótica desplegada por los participantes para hacer evidente la relación entre dicha propiedad y el procedimiento de construcción compartido por Gonzalo.

Al inicio de esta acción, el formador invitó a Gonzalo a proporcionar más detalles (línea 19) acerca de la relación entre la necesidad de la intersección y la posibilidad de construir el triángulo que el futuro profesor había expresado en la línea 18. Gonzalo respondió a esta invitación estableciendo una relación entre el tamaño de los lados del triángulo (relación $m > n/2$) (línea 20), lo que el formador aprovechó para poner en duda la decisión del futuro profesor de hacer de n el tamaño de la base del triángulo (operación O_1 de la Figura 3a) (línea 21). No obstante, cuando el formador pidió a Gonzalo una explicación de la inconveniencia de hacer de n la base del triángulo (líneas 22 y 23), rápidamente el futuro profesor abandonó la relación establecida en la línea 20 para recurrir nuevamente a la percepción visual sobre el dibujo en la pantalla (línea 24), reduciendo las posibilidades de establecer vínculos con la desigualdad triangular. Ante esto, el formador utilizó la falta de intersección entre las circunferencias h y k como punto de partida para traer esta propiedad geométrica a la actividad, sin dejar de lado su crítica sobre la operación O_1 (línea 25).

[19] *Formador*: *¿Y entonces?*

- [20] *Gonzalo: Que m debería ser, por lo menos, más grande que la mitad de n para poder hacer el triángulo isósceles con base n .*
- [21] *Formador: Es decir, el procedimiento que aplicaste hace un momento, hace rato, tomando como base a m , no funciona cuando la base es n . ¿Cierto?*
- [22] *Gonzalo: [después de unos segundos de silencio] Parece que no.*
- [23] *Formador: Parece que no. No funciona. ¿Por qué?*
- [24] *Gonzalo: Porque no hay intersección entre las circunferencias.*
- [25] *Formador: Si no hay intersección entre las circunferencias, [entonces] hay algo que no se cumple, que podemos conseguir en la teoría [geométrica]. ¿Te acuerdas de eso? ¿Te acuerdas de una propiedad de los triángulos que no se está cumpliendo aquí? (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).*

El esfuerzo del formador en la línea 25 continuó con una invitación a dialogar sobre la desigualdad triangular como propiedad fundamental para la construcción de triángulos con regla y compás (línea 26). Atendiendo a esta invitación, Gonzalo retomó la idea de la línea 20, esta vez refiriéndose a los radios de las circunferencias h , k y e (Figura 3a) que fueron definidos a partir del tamaño de los lados m y n (línea 27). Luego de reconocer que la respuesta del futuro profesor se acercaba a la relación que implica la desigualdad triangular, el formador echó mano de los recursos semióticos disponibles en el aula (más allá del espacio de trabajo del software) para crear condiciones que hicieran posible la transformación de esta propiedad en objeto de conciencia para Gonzalo (línea 28). Específicamente, el formador utilizó el dibujo de un triángulo con lados a , b y c para preguntar sobre la condición que las medidas de estos lados debían cumplir para que el triángulo existiera. La respuesta de Gonzalo, caracterizada por un silencio significativo, sugiere que no era plenamente consciente de esta propiedad en ese instante (línea 29).

- [26] *Formador: Si quieres lo discutimos [se refiere a la desigualdad triangular]. Éste es un conocimiento fundamental de geometría y de ese saber depende que seamos capaces de construir triángulos a partir de condiciones iniciales. Tenemos este problema [señala la construcción de Gonzalo]. No hay intersección. ¿Por qué?*
- [27] *Gonzalo: [hace un breve silencio] O sea, no hay intersección porque los radios [de las circunferencias h y k de la Figura 3a] son menores que la mitad del radio de la circunferencia mayor [refiriéndose a la curva e en la misma figura].*
- [28] *Formador: Por allí viene la cosa. Fíjate, ya estás conectando. ¿Tú te acuerdas de...? Si yo tengo un triángulo cualquiera [dibuja un triángulo cualquiera de lados a , b y c (Figura 5)], ¿qué condición cumplen las medidas de estos lados para que el triángulo exista?*



Figura 5 – El formador dibuja un triángulo de lados a , b y c en la pizarra
Fuente: datos de la investigación

- [29] *Gonzalo: [se queda callado y observa la interfaz del software en la computadora mientras se lleva la mano a la boca (Figura 6)] (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).*

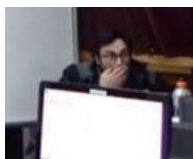


Figura 6 – Gonzalo se lleva la mano a la boca
Fuente: datos de la investigación

Para lograr que Gonzalo tomara conciencia de la desigualdad triangular, el formador empleó una estrategia de trabajo basada en la comparación de los tamaños de los lados del triángulo dibujado previamente en la pizarra (ver Figura 5), apoyándose en un caso específico (Figura 7) que les permitiera transitar de lo particular a lo general. Específicamente, se establecieron comparaciones *uno a dos*, es decir, se relacionó el tamaño de cada lado del triángulo con el de los lados restantes (unidos por la suma de sus medidas), empleando coordinadamente palabras, gestos e inscripciones de varios tipos (líneas 30 a la 35).

[30] *Formador: Busquemos un caso particular. No sé si te acuerdas de este triángulo muy famoso, con lados 3, 4 y 5 [dibuja un triángulo rectángulo con tales medidas (Figura 7)].*

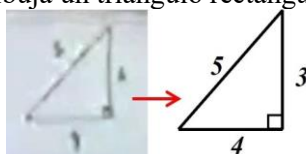


Figura 7 – Triángulo rectángulo utilizado por el formador
Fuente: datos de la investigación

[31] *Gonzalo: Sí.*

[32] *Formador: Una terna pitagórica, ¿cierto? Lo que se cumple en general [señala el triángulo de la Figura 5] debe cumplirlo éste en particular [señala el triángulo de la Figura 7]. Relacionemos esas medidas y saquemos conclusiones. Por ejemplo, relacionemos este lado [realiza una marca sobre el número 5 (Figura 8a)] con los otros dos. ¿Qué podemos decir? Vamos a relacionar el 5 con el 3 y el 4 [escribe estos valores en la pizarra, como se muestra en la Figura 8b]. Podemos hacer relaciones separadas, es decir, el 5 con el 3 y el 5 con el 4. Pero también pudiéramos establecer una relación entre el 5 y este conjunto [encierra los valores 3 y 4 en un cuadro y dibuja una flecha desde el 5 a esta marca (Figura 8c)], aunque para ello debemos definir bien este conjunto. ¿Cómo podríamos definirlo?*



Figura 8 – El formador inicia el establecimiento de relaciones entre el tamaño de los lados del triángulo
Fuente: datos de la investigación

[33] *Gonzalo: Tres más cuatro [hace referencia a la suma de los números 3 y 4].*

[34] *Formador: Puede ser tres más cuatro [coloca el signo + entre 3 y 4 (Figura 9)] y convertir esta suma ¿en cuánto?*

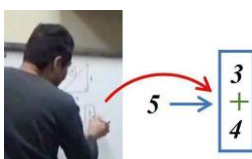


Figura 9 – El formador indica en la pizarra la suma del tamaño de dos lados 3 y 4 del triángulo
Fuente: datos de la investigación

[35] Gonzalo: En 7. (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

Las comparaciones *uno a dos*, materializadas intencionalmente por el formador en la pizarra (líneas 36, 38 y 42), permitieron a Gonzalo notar cómo se cumple la relación de desigualdad *menor que* entre el tamaño de cada lado del triángulo de la Figura 8 y la suma del tamaño de los lados restantes (líneas 37, 41 y 43), muy a pesar de la vacilación del futuro profesor en medio del diálogo (línea 39) que el formador supo gestionar (línea 40).

[36] Formador: En 7 [escribe el 7 a la derecha del cuadro (Figura 10)]. Entonces, en vez de hacer una comparación del 5 con el 3 y el 4, por separado, hacemos una comparación entre 5 y 7, a ver qué nos da. ¿Cómo es el 5 con respecto al 7?

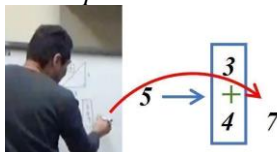


Figura 10 – El formador escribe el resultado de la suma del tamaño de los lados 3 y 4 del triángulo
Fuente: datos de la investigación

[37] Gonzalo: Menor.

[38] Formador: Es menor. 5 es menor que 7 [escribe $5 < 7$ (Figura 11a)]. Ésta es una relación de orden que cumplen todos los números, por eso la puedo hacer. Eso es con el 5. ¿Y qué tal si lo hago con el 4? [realiza una marca sobre el número 4 en el triángulo (Figura 11b)]. ¿Qué se cumple?

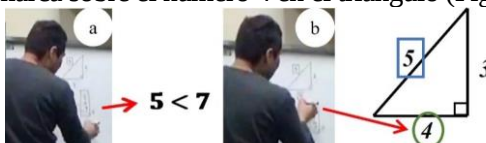


Figura 11 – El formador escribe la primera de las relaciones de la desigualdad triangular del caso
Fuente: datos de la investigación

[39] Gonzalo: El 4 es mayor que 3.

[40] Formador: El 4 es mayor que 3, pero...

[41] Gonzalo: Ah, pero [el 4] es menor que 8.

[42] Formador: ¡Exacto! [escribe $4 < 8$ (Figura 12a)]. ¿Y si lo hago con el 3 [realiza una marca sobre el número 3 en el triángulo (Figura 12b)], en definitiva...?

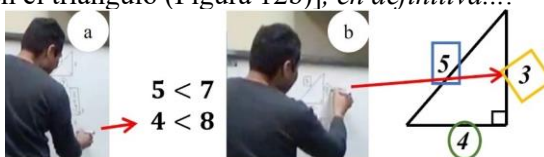


Figura 12 – El formador escribe la segunda de las relaciones de la desigualdad triangular del caso
Fuente: datos de la investigación

[43] Gonzalo: [El 3] Es menor que 9. (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

En el diálogo, la manera de notar de Gonzalo avanzó hacia una forma más general de expresión (por medio de palabras) de la relación de desigualdad triangular que subyace en el caso del triángulo rectángulo (líneas 44 a la 48). Este nivel de conciencia alcanzado por el futuro profesor le permitió extender la relación de desigualdad triangular a su propio procedimiento de construcción (línea 49), para dar sentido al hecho de no haber hallado un punto de

intersección entre las circunferencias h y k (acción formativa *percibir*) (línea 50).

[44] *Formador*: [Escribe $3 < 9$ (Figura 13a)] *Entonces, esto ya me dice todo* [señala las desigualdades con un movimiento vertical de la mano a la izquierda de estos signos (Figura 13b)]. *¿Qué quiere decir esto?*



Figura 13 – El formador escribe la tercera de las relaciones de la desigualdad triangular del caso
Fuente: datos de la investigación

[45] *Gonzalo*: [quiere decir que] *La suma de los otros dos lados tiene que ser menor que...*

[46] *Formador*: *¿La suma debe ser cómo?*

[47] *Gonzalo*: *Mayor, perdón. Mayor que el lado que estamos subrayando.*

[48] *Formador*: *¡Exacto! ¿Y a qué se debe esto?*

[49] *Gonzalo*: *¡Ah, claro! La suma... a ver... Si yo tengo dos emes* [se refiere a dos lados de tamaño m], *la suma $2m$ debería ser mayor que n* [el formador escribe $2m > n$ en la pizarra].

[50] *Formador*: *Debería ser mayor que n , pero no lo es. Y como no lo es, no hay construcción. Por tanto, aquí tu condición, tu idea aquella de decir “yo lo hago de dos maneras”* [según el tamaño de la base del triángulo] *no sirve para todos los casos, como lo estamos viendo aquí.* (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

El esfuerzo conjunto de los participantes para evidenciar los vínculos entre la desigualdad triangular y el procedimiento de construcción compartido al inicio del episodio, colocó a Gonzalo en una condición favorable para entregar una respuesta al problema, lo cual llega a concretarse en una nueva acción formativa.

4.1.3 Posicionarse

En la tercera acción formativa, Gonzalo y el formador se *posicionaron* de dos maneras distintas. Por un lado, ellos fijaron posición ante el modo de proceder de la Figura 3a, objetando la decisión de hacer de n el tamaño de la base del triángulo isósceles (esta decisión se refleja en las operaciones O_1 y O_2 de la Figura 3a; la objeción se muestra en las línea 51 a la 54). Como resultado, Gonzalo modificó el dibujo para lograr la respuesta esperada al problema (ver Figura 3b), a partir de la consideración de m como el tamaño de la base del triángulo (líneas 55 a la 57). Una cuestión que llama la atención en este nuevo modo de proceder de Gonzalo es el hecho de haber utilizado la herramienta *Compás*, atendiendo con ello a la invitación del formador previo al episodio. El modo de proceder del futuro profesor culminó con la validación de lo hecho tanto por él mismo (al arrastrar la construcción por los puntos P y E , línea 59) como por el formador (línea 58). Este primer posicionamiento culminó con la enunciación verbal y simbólica de la desigualdad triangular por parte del formador (líneas 60 a la 62).

[51] *Gonzalo*: [deshace las operaciones de la construcción] *Entonces, lo que tendría que hacer*

aquí es trabajar con la medida de n [construye una circunferencia con centro P y radio n].

[52] *Formador: ¿De n ?*

[53] *Gonzalo: Perdón. No, no, no, no.*

[54] *Formador: La otra medida* [se refiere a m]. *Quítala* [pide deshacer la operación de la línea 51].

[55] *Gonzalo: Con la medida de m* [construye la circunferencia e con centro P y radio m (O_1 en la Figura 3b)]. *Ahí sí. Luego, dibujamos un punto cualquiera, que ya habíamos dicho que...* [fija el punto E sobre la circunferencia e (O_2 en la Figura 3b)].

[56] *Formador: Que iba a representar la base* [complementa a Gonzalo].

[57] *Gonzalo: Luego, con la herramienta Compás, con centro en P* [construye la circunferencia h con centro P y radio n (O_3 en la Figura 3b)] *y con centro en E* [construye la circunferencia k con centro E y radio n (O_4 en la Figura 3b)], *ubicando el punto de intersección entre esas dos* [interseca las curvas h y k , dando lugar al punto F (O_5 en la Figura 3b)]. *Y luego, polígono PFE* [construye el triángulo t_1 de vértices P , F y E (O_6 en la Figura 3b)] *y ya.*

[58] *Formador: Ahí lo tenemos. Y ese* [dibujo] *cumple con las condiciones que nos da la tarea.*

[59] *Gonzalo:* [aplica la prueba del arrastre al dibujo dinámico por los puntos P y E].

[60] *Formador: Yo quise que ustedes se dieran cuenta de que [...] debe cumplirse que el lado a debe ser menor que $b + c$* [escribe $a < b + c$], *que b debe ser menor que $a + c$* [escribe $b < a + c$] *y que c debe ser menor que $a + b$* [escribe $c < a + b$ (Figura 14)]. *Esto que está acá se llama “desigualdad triangular”. Me imagino que la trabajaron en otros cursos.*

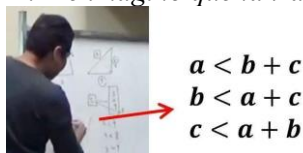


Figura 14 – El formador escribe las relaciones de la desigualdad triangular para el triángulo de la Figura 5
Fuente: datos de la investigación

[61] *Gonzalo: He escuchado el término un montón de veces.*

[62] *Formador: La desigualdad triangular es una propiedad que cumplen todos los triángulos. ¿En qué consiste esta propiedad? En que cualquier lado del triángulo siempre es de menor medida que la suma de los otros dos. Esto es lo que no se cumple si tomamos como base a n .* (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

Por otro lado, Gonzalo fijó posición ante la afirmación del formador sobre la *imposibilidad* de lograr la construcción del triángulo isósceles (línea 66) como el joven llegó a pensarlo (línea 65). En este posicionamiento, el futuro profesor planteó la posibilidad de producir una construcción bajo la condición $2m = n$ (líneas 67, 69, 71, 73, 75 y 77) en respuesta al formador, quien buscó persuadir a Gonzalo de que su planteamiento no tenía cabida dentro de lo que trata la desigualdad triangular (líneas 68, 70, 72, 74, 76 y 78). En este diálogo, el futuro profesor terminó por reconocer la imposibilidad de la construcción del triángulo, bajo la condición establecida por él (línea 79).

[65] *Gonzalo: [...] Fue desafiante el hecho de darme cuenta de que no se podía construir* [el triángulo isósceles] *con base n .*

[66] *Formador: [...] El que sabe geometría busca una razón. [La construcción] no es posible precisamente porque la suma de los lados iguales, es menor que la base y no puede ser así.*

[67] *Gonzalo: Si m fuera igual a la mitad de n , siempre obtendremos una recta, ¿cierto?*

[68] *Formador: Si m fuera igual a la mitad de n , ¿cuál sería la base* [del triángulo]?

[69] *Gonzalo: Sería n .*

[70] *Formador: Ajá. ¿Habría construcción?*

[71] *Gonzalo: Es que sería una recta* [desplaza su mano horizontalmente por la pizarra (Figura 15)].



Figura 15 – Gonzalo deslaza deslaza su mano horizontalmente por la pizarra
Fuente: datos de la investigación

[72] *Formador: ¿Por qué? Háblame en estos términos* [señala las desigualdades escritas en la pizarra (línea 60)].

[73] *Gonzalo: Porque en vez de que la suma de los dos* [se refiere a $2m$] *sea mayor que* n .

[74] *Formador: Ajá, ¿cómo debe ser?* [escribe $2m _ n$ en la pizarra].

[75] *Gonzalo: Igual* [señala hacia la pizarra mientras que el formador escribe $2m = n$ (Figura 16)].

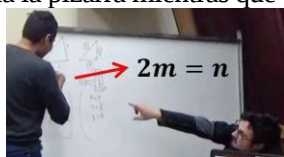


Figura 16 – Gonzalo señala hacia la pizarra mientras que el formador escribe la relación $2m = n$
Fuente: datos de la investigación

[76] *Formador: Entonces, este caso* [$2m = n$] *no entra aquí. Esto es estrictamente menor* [se refiere a lo tratado en la línea 60]. *Por tanto, este caso no aplica.*

[77] *Gonzalo: Pero entre comillas, muy entre comillas, sí se estaría formando... sí hay una construcción. No es un triángulo, pero se considera.*

[78] *Formador: Lo que pasa es que, si te piden construir un triángulo, éste tiene tres vértices. No tiene dos* [entre risas]. *Recuerda que, por definición, los vértices de un triángulo no están alineados. Entonces, en ese caso, están alineados. Por tanto, no puede haber un triángulo.*

[79] *Gonzalo: Ah, ya. Sí, sí, sí* [entre risas]. *Ya* [asiente con la cabeza]. (Transcripción de la actividad de Gonzalo y el formador, 2019).

Las acciones descritas en este apartado han puesto de manifiesto las distintas tensiones experimentadas por los participantes alrededor del procedimiento de construcción compartido por Gonzalo al inicio del episodio. Estas tensiones dan cuenta de una contradicción conceptual que explicamos en el siguiente apartado.

4.2 La contradicción y su contribución al aprendizaje del SACEG

Las tensiones experimentadas por los participantes en el episodio se originaron a partir de un hecho puntual: cuando Gonzalo y el formador percibieron la ausencia de un punto de intersección entre las circunferencias h y k . En correspondencia con nuestros presupuestos teóricos y metodológicos, consideramos que estas tensiones revelan una contradicción conceptual relacionada con la *función que cumple la desigualdad triangular* en la producción de procedimientos de construcción de triángulos. Como establecimos en la metodología, la explicación de esta contradicción y su contribución al aprendizaje del SACEG movilizado en el episodio gira en torno a los siguientes aspectos: (a) el lugar ocupado por los polos opuestos en el episodio; (b) la relación de interdependencia entre estos polos; y (c) los medios empleados

por éstos en la lucha con su contrario. En lo que sigue, desarrollamos estos tres aspectos.

4.2.1 El lugar ocupado por los polos opuestos en el episodio

Como hemos apuntado, la contradicción surgida en el episodio está relacionada con la función que cumple la desigualdad triangular en la producción de procedimientos de construcción de triángulos. En la producción de estos procedimientos, coexisten modos históricos y culturales de proceder controlados (o no) por conceptos, relaciones y propiedades geométricas inherentes a los triángulos (en este caso, la desigualdad triangular). Por lo tanto, podemos afirmar que los polos opuestos de la contradicción evidenciada en el episodio se expresan en los modos de proceder que Gonzalo y el formador trajeron a la actividad. Por un lado, se tiene el modo de proceder de Gonzalo, *desprovisto* de su relación con la desigualdad triangular (ver Figura 3a). Por otro lado, se tiene el modo de proceder del formador, reflejado en su conciencia e *impregnado* de esta propiedad geométrica.

De acuerdo con Stouraitis, Potari y Skott (2017, p. 207, traducción nuestra), la contradicción del episodio puede entenderse como una de tipo *objeto-proceso*, ya que ésta expresa “aspectos que involucran los conceptos, relaciones y propiedades, por un lado, y la ejecución de operaciones o algoritmos por el otro”. En el episodio, el *objeto* se refiere a la desigualdad triangular en tanto propiedad fundamental que garantiza la posibilidad de construcción del triángulo, mientras que el *proceso* hace referencia a los modos de proceder traídos a la actividad y que pueden (o no) estar impregnados del objeto.

Pese a las tensiones provocadas por los polos de la contradicción, la oposición recíproca entre éstos resultó determinante para reconocer la función que la desigualdad triangular cumplía en la producción del procedimiento de construcción de Gonzalo. Por un lado, el modo de proceder del futuro profesor aportó la materia prima que fue transformándose progresivamente en una respuesta esperada, como resultado del esfuerzo de los participantes por encontrar una razón ante la falta de un punto de intersección entre las circunferencias h y k . Por otro lado, el modo de proceder del formador proporcionó el fundamento conceptual para comprender el hecho anterior como la imposibilidad de construir el triángulo isósceles debido al no cumplimiento de la desigualdad $n < 2m$.

4.2.2 La relación de interdependencia entre los polos

En cuanto al segundo aspecto, el análisis mostró que los modos de proceder traídos a la

actividad por Gonzalo y el formador coexistieron en el episodio como un todo articulado bajo una relación de interdependencia. Desde una perspectiva dialéctico-materialista, esta interdependencia significa tanto que la relación entre los polos de la contradicción no es de causa y efecto, sino una en la que cada modo de proceder implica la existencia dialéctica de su contrario (acciones formativas *percibir* y *reconocer*), como también que, sobre la base de ciertas condiciones (acciones formativas *reconocer* y *posicionarse*), estos modos opuestos se transforman en una síntesis de determinaciones (Radford, 2017a).

En lo que respecta a la existencia dialéctica de los polos opuestos, el modo de proceder de Gonzalo en la Figura 3a trajo a la actividad el fundamento conceptual aportado por el formador, al no dar cuenta de la construcción del triángulo isósceles con base n . Así mismo, el modo de proceder del formador, impregnado de dicho fundamento, trajo a la actividad el modo de Gonzalo, ya que lo primero garantizó la construcción para cuando m se tomó como base del triángulo (situación previa al episodio); en otras palabras, el primer procedimiento empleado por el futuro profesor (ver Figura 2) estuvo impregnado por la desigualdad triangular, independientemente de la conciencia que se tuviera de ello, sirviendo de precedente para reproducirlo al inicio del episodio.

En cuanto a la transformación de los polos opuestos, vale decir que ambos modos de proceder surgieron en la actividad para negarse mutuamente, luchar entre sí y transformarse en una nueva síntesis de determinaciones que permitiera a los participantes tomar conciencia de la función que la desigualdad triangular cumplía en la producción del procedimiento compartido por Gonzalo, dentro de un movimiento dialéctico “de un zig-zag en espiral siempre ascendente, en que lo negado no es destruido completamente sino superado” (Albó, 1962, p. 167). Esta nueva síntesis de determinaciones se produjo en el episodio a partir del reconocimiento de la relación *menor que* entre el tamaño de los lados del triángulo rectángulo usado como ejemplo por el formador (líneas 36 a la 43), la extensión de esta relación al modo de proceder de Gonzalo (líneas 44 a la 50) y el posicionamiento crítico ante este modo de proceder (líneas 51 a la 62).

4.2.3 Los medios empleados por los polos en la lucha con su contrario

Finalmente, encontramos que la toma de conciencia del SACEG en el episodio estuvo precedida por la respuesta de Gonzalo al problema de construir el triángulo isósceles de la tarea 4 (ver Figura 2). Sin embargo, el análisis de los datos puso en evidencia que el haber entregado una respuesta a este problema no implicó un reconocimiento del futuro profesor de la desigualdad triangular como la propiedad fundamental que garantizó la construcción del

triángulo para el caso en que el tamaño de la base era m . En este contexto, la decisión de Gonzalo de partir su construcción asumiendo a n como el tamaño de la base del triángulo (acción formativa *percibir*), lejos de constituirse en un *error* que debía evitarse a toda costa, terminó siendo el desencadenante de la lucha entre los polos opuestos de la contradicción.

Como los datos muestran, la lucha entre los modos de proceder traídos a la actividad por los participantes creó las condiciones para la transformación de la desigualdad triangular en objeto de conciencia durante el episodio (acción formativa *reconocer*). Según nuestro análisis, esta transformación no se redujo al empleo de una lógica de acciones y operaciones orientada por la conceptualización detrás de la herramienta *Polígono*, sino que también implicó impregnar dicha propiedad geométrica en la lógica de construcción de Gonzalo. En esta dinámica, el formador contribuyó de manera importante a la concreción de esta transformación, especialmente al desplegar junto al futuro profesor una actividad semiótica que les llevó a comprender la función que la desigualdad triangular cumplía en la producción del procedimiento de construcción del triángulo isósceles.

Sobre la contribución del formador en la toma de conciencia del SACEG en el episodio, destacamos dos aspectos que se observan en la acción formativa *reconocer*. Por un lado, los datos revelan el esfuerzo de este sujeto por hacer de la desigualdad triangular algo tangible y susceptible de ser pensado por Gonzalo (p. ej., líneas 30 y 32), actuando no de forma clásica en cuanto a la relación sujeto-objeto (transmitiendo o construyendo el saber), sino mediante un proceso creativo que consistió “en volver algo visible al ámbito de la atención y del entendimiento” (Radford, 2018, p. 67). Por otro lado, en ese esfuerzo observamos al formador usar diferentes recursos semióticos (palabras, inscripciones y gestos) de manera coordinada, lo que concuerda con la naturaleza sensual de la actividad de los participantes.

Considerando los planteamientos de Iliénkov (2017), y de acuerdo con los datos, el modo de proceder de Gonzalo generó una situación conflictiva (acción formativa *percibir*) que no podía comprenderse simplemente con el empleo de un procedimiento de construcción estándar (un algoritmo), lo que demandó al formador traer a la actividad una forma de pensamiento específico de la enseñanza de la geometría, algo que el *software* por sí mismo no podía ofrecer. Sobre este asunto, la obra de Rosa, Moraes y Cedro (2016) nos sugiere que, durante la acción formativa *reconocer*, el formador echó mano de un *pensamiento teórico* con las siguientes características: (i) se elabora a través del análisis de determinada relación entre objetos al interior de un sistema; y (ii) relaciona lo general con lo particular.

Ambas características se observaron en la estrategia del formador al invitar a Gonzalo a analizar la relación entre el tamaño de los lados de un triángulo cualquiera a partir de un caso

específico (lo particular, línea 30), que poco a poco condujera a la relación de desigualdad triangular (lo general, línea 49). Esto tiene relación con lo que Rosa, Moraes y Cedro (2016, p. 79, traducción nuestra) han llamado *generalización empírica*, esto es, el proceso de generalización del pensamiento que toma como punto de partida “los objetos y fenómenos singulares, sensorialmente perceptibles, del mundo que nos rodea”.

5 Conclusiones

En este artículo ofrecimos una explicación de la manera en que un futuro profesor y el formador se enfrentaron a una contradicción conceptual (relacionada con la función que cumple la desigualdad triangular en la construcción de triángulos), y de cómo esto contribuyó al aprendizaje del SACEG movilizado en la actividad. Para ello, analizamos un fragmento de la actividad (el episodio) en el que los participantes se involucraron en la producción de un procedimiento de construcción de un triángulo isósceles con GeoGebra conocidos el tamaño de sus lados; esto a partir de una serie de reflexiones acerca del modo de proceder del futuro profesor con este problema.

Inspirados en el método dialéctico-materialista, realizamos el análisis de los datos en dos etapas. Los resultados de este análisis nos permiten formular dos conclusiones. Por un lado, concluimos que la toma de conciencia del SACEG en el episodio se derivó de la manera en que Gonzalo (el futuro profesor) y el formador se enfrentaron con una contradicción de tipo objeto-proceso, debido a que la lucha entre sus modos de proceder con el *software* resultó ser para ellos la llave de acceso a la esencia de este saber materializado en la actividad. De hecho, dado que la realidad puede ser comprendida únicamente en la unidad fenómeno-esencia (Kosík, 1967), la manera de enfrentarse con la contradicción en el episodio llevó a los participantes a reconocer la función que la desigualdad triangular (en tanto propiedad fundamental de los triángulos) tuvo en el modo de proceder de Gonzalo en la acción formativa *percibir*, permitiéndoles superar la situación de tensión en la que se encontraban.

La manera en que los dos modos de proceder lucharon en el episodio nos permite afirmar que la contradicción cumplió un papel destacado en el proceso de transformación de la desigualdad triangular en objeto de conciencia. Al respecto, Radford (2023, p. 115) considera que las contradicciones de la actividad matemática del aula no deben entenderse como defectos o errores, sino como “el motor que empuja la actividad hacia adelante y la mantiene en movimiento”.

Nuestro análisis muestra que la lógica de construcción compartida por Gonzalo al inicio

del episodio no fue un error u obstáculo, sino la materia prima que sirvió para impulsar la actividad hacia su objeto. Además, el problema implementado por el formador tampoco fue un error u obstáculo, ya que su diseño tuvo en cuenta la necesidad de movilizar la desigualdad triangular para validar el modo de proceder del futuro profesor. En definitiva, la contradicción manifestada en el episodio fue el *motor* que impulsó y orientó la producción del procedimiento de construcción del triángulo isósceles que daba respuesta al problema.

Por otro lado, concluimos que la manera en que la contradicción fue enfrentada en el episodio permitió romper con la relación *práctica-utilitarista* (Kosík, 1967) que Gonzalo mantuvo con el problema. Este tipo de relación se hizo notar en la decisión del futuro profesor de emplear, al inicio del episodio, el mismo procedimiento de construcción utilizado para el caso en que m representaba el tamaño de la base del triángulo. Podemos afirmar que Gonzalo abordó el problema de manera práctica-utilitarista debido a la familiaridad que él tenía con ese procedimiento de construcción y con la conceptualidad detrás de la herramienta *Polígono*. Por familiaridad entendemos aquella entidad que habilitó a Gonzalo a emplear el procedimiento de la Figura 3a y que Radford (2023) denomina *concepto*.

Los datos muestran no solo que este concepto se nutrió gracias a la transformación de la desigualdad triangular en un objeto de conciencia para Gonzalo, sino también que el futuro profesor se fue coproduciendo con el formador en tanto sujeto que se inscribe constantemente en la cultura matemática-escolar a la que pertenece, por medio de su actividad práctica (Radford, 2023). Precisamente, fue mediante este proceso de inscripción en el mundo que Gonzalo pudo romper con la *alienación* (Gutiérrez; Prieto; Sánchez, 2022) que lo mantenía confinado a un modo de proceder con el software desprovisto de la desigualdad triangular. En este sentido, Radford (2017b, p. 151) sostiene que el individuo en este estado de alienación “termina encerrado en sus propias cavilaciones y aislado del mundo. [...] El sujeto aparece como un ser confinado: las únicas cosas que puede entender son aquellas que provienen del sujeto mismo”.

En efecto, encontramos en el análisis que el Gonzalo de la acción formativa *percibir* (más cauteloso ante la situación de tensión) se aleja del Gonzalo de la acción formativa *posicionarse* (más propositivo y comprometido con la actividad). Pese a que no ha sido nuestro foco de atención, los datos de la investigación sugieren que la manera en que las contradicciones dialécticas son enfrentadas en contextos de formación inicial de profesores de matemáticas puede revelar estados de alienación en los participantes. Si pensamos en el concepto de labor conjunta de la TO, la superación de la alienación en los futuros profesores dependería en gran medida de las actitudes éticas (representadas en los vectores de la ética comunitaria) de estos

sujetos, puestas en juego al enfrentarse con tales contradicciones. Sin embargo, las limitaciones de este artículo nos llevan a considerar necesario el desarrollo de más investigaciones que den sustento empírico a estas últimas afirmaciones.

Agradecimientos

La preparación de este artículo contó con el financiamiento del fondo de enlace para investigadoras/es recientemente ingresados a las universidades estatales de la Red 21995, Proyecto *Fortalecimiento de la investigación y la formación avanzada en Educación en el sistema de Universidades Estatales* RED 21995, PFUE 2021, de Chile.

Referencias

- ALBÓ, X. Leyes del materialismo dialéctico. **Espíritu**, Barcelona, v. 11, [s.n.], p. 162-176, 1962.
- DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**: investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Editorial Progreso, 1988.
- FLICK, U. **Introducción a la investigación cualitativa**. Madrid: Ediciones Morata, 2007.
- GADOTTI, M. **Concepção dialética da educação**: um estudo introdutório. 9. ed. São Paulo: Cortez, 1995.
- GODINO, J. D.; RUÍZ, F. **Geometría y su didáctica para maestros**. Granada: Universidad de Granada, 2002.
- GOODCHILD, S.; JAWORSKI, B. Using contradictions in a teaching and learning development project. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 29, 2005, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: PME, 2005. p. 41-48 (Collected Works Vol. 3). Disponible en: <https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3GoodchildJaworski.pdf>. Accedido en: 21 mar. 2024.
- GROENWALD, C. L. O.; LLINARES, S. Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)**, Maracaibo, v. 2, n. 2, p. e202202, 2022.
- GUTIÉRREZ, R. E.; PRIETO, J. L.; SÁNCHEZ, I. Formas de alienação presentes na atividade de formação inicial de professores de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1062-1086, 2022.
- HARVEY, F.; NILSSON, P. Contradictions and their manifestations in professional learning communities in mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Amsterdam, v. 25, n. 6, p. 697-723, 2022.
- ILIÉNKOV, E. V. **Lógica dialéctica**. Moscú: Editorial Progreso, 1977.
- ILIÉNKOV, E. V. **Educación, conocimiento y pedagogía**. Traducido por Víctor Carrión Arias. Quito: Edithor, 2017.

ITURRA, F.; MANOSALVA, C.; RAMÍREZ, M.; ROMERO, D. **Matemática 7° básico**. Texto del estudiante. Edición especial para el MINEDUC. Santiago de Chile: SM S.A., 2019.

KOSÍK, K. **Dialéctica de lo concreto**. México: Editorial Grijalbo, 1967.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN - MINEDUC. **Estándares pedagógicos y disciplinarios para carreras de pedagogía en matemática**. Santiago de Chile: MINEDUC, 2021.

MORETTI, V. D.; MARTINS, E.; SOUZA, F. D. Método histórico-dialético, teoría histórico-cultural e educação: algumas apropriações em pesquisas sobre formação de professores que ensinam matemática. In: MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (org.). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas**. Campinas: Mercado de Letras, 2017. p. 25-59.

MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R. L. L. (org.). **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004. p. 257-284.

PAULA, E. F.; CYRINO, M. C. C. T. Perspectivas de identidade profissional de professores que ensinam matemática presentes em artigos científicos publicados entre 2006-2016. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 5, p. 778-799, 2018.

POWELL, A. B.; SILVA, W. Q. O vídeo na pesquisa qualitativa em educação matemática: investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: POWELL, A. B. (org.). **Métodos de pesquisa em educação matemática usando escrita, vídeo e internet**. Campinas: Mercado de Letras, 2015. p. 15-60.

PRIETO, J. L. **Diseño de una actividad formativa y su contribución al aprendizaje de las construcciones euclidianas con GeoGebra en futuros profesores de matemáticas**. 2022. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) - Universidad de Los Lagos, Osorno, 2023.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. especial, p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 85, n. 3, p. 405-422, 2014.

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In: D' AMORE, B.; RADFORD, L. (org.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a. p. 97-114.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. In: D' AMORE, B.; RADFORD, L. (org.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b. p. 139-165.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. **PNA**, Granada, v. 12, n. 2, p. 61-80, 2018.

RADFORD, L. Reimaginar el aula de matemáticas: las matemáticas escolares como praxis emancipadora. **Revista Chilena de Educación Matemática**, Valparaíso, v. 13, n. 2, p. 44-55, 2021.

RADFORD, L. **La teoría de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Ediciones Uniandes, 2023.

RADFORD, L.; LASPRILLA, A. De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. **La matemática e la sua didattica**, Bologna, v. 28, n. 1, p. 107-128,

2020.

ROSA, J. E.; MORAES, S. P. G.; CEDRO, W. L. As particularidades do pensamento empírico e do pensamento teórico na organização do ensino. *In*: MOURA, M. O. (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas: Autores Associados, 2016. p. 77-92.

SPIRKIN, A. G. **Materialismo dialéctico y lógica dialéctica**. México: Editorial Grijalbo, 1969.

STOURAITIS, K.; POTARI, D.; SKOTT, J. Contradictions, dialectical oppositions and shifts in teaching mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 95, n. 2, p. 203-217, 2017.

TARDIF, M. **Los saberes del docente y su desarrollo profesional**. Barcelona: Narcea Editores, 2002.

TSE-TUNG, M. **Sobre la contradicción**. Santiago: Ediciones Espartaco, 2014.

YAMAGATA-LYNCH, L. C.; HAUDENSCHILD, M. T. Using activity systems analysis to identify inner contradictions in teacher professional development. **Teaching and Teacher Education**, London, v. 25, n. 3, p. 507-517, 2009.

Submetido em 26 de Junho de 2023.
Aprovado em 11 de Dezembro de 2023.